

Math & Manips



des manipulations pour aborder la dérivée et l'optimisation

Marie-France Guissard, Pauline Lambrecht,
Valérie Henry, Patricia Van Geet, Sylvie Vansimpsen, Isabelle Wettendorff



Centre de Recherche
sur l'Enseignement
des Mathématiques



Région
wallonne

LA Conférence de Maths

27 mai 2017

- Recherches
- Publications
- Logiciels
- Formations
- Bibliothèque



www.crem.be

info@crem.be

Math & Manips

Objet : introduire des manipulations en classe pour favoriser la construction des apprentissages

- Démarches physiques
- Conflits cognitifs
- Généralisation, extension, modélisation
- Divers registres

En pratique

Une *Math & Manip*

- se déroule dans le local habituel du cours de mathématiques,
- utilise du matériel facile à se procurer,
- est d'une durée comparable à celle d'une séquence sans manipulation.

Méthodologie

- Conception d'activités (pour tous les niveaux d'enseignement)
 - école maternelle
 - école primaire
 - secondaire inférieur
 - secondaire supérieur
- Expérimentations
- Documents pour les enseignants

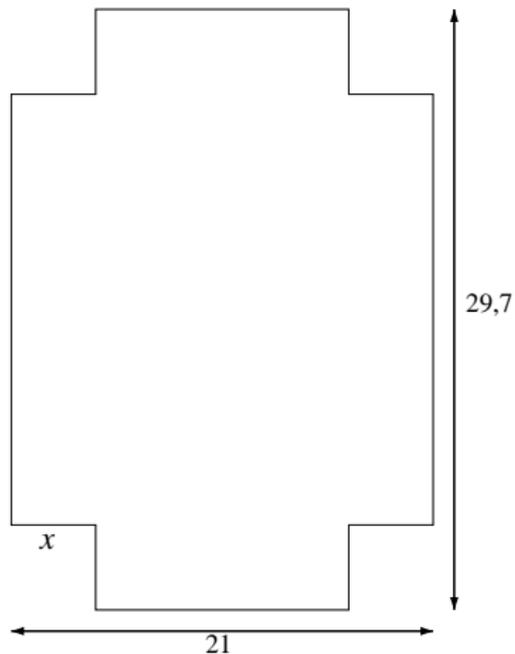
Math & Manips
pour le secondaire supérieur
Problèmes d'optimisation

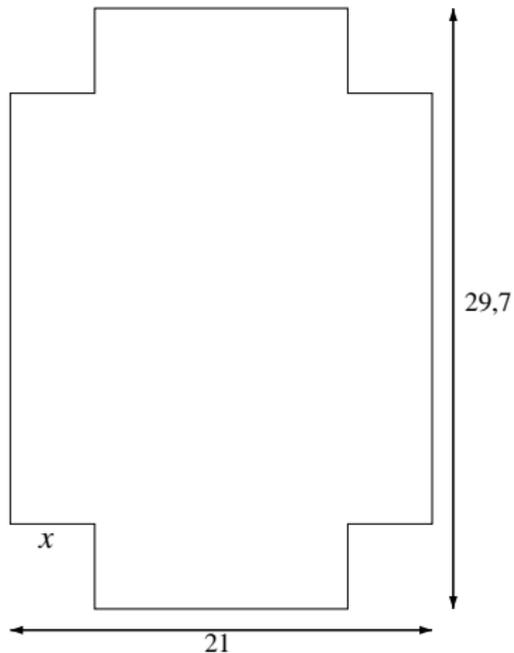
Activités

- Boîte sans couvercle
- Boîte parallélépipédique
- Cube
- Cône (pour sections scientifiques)

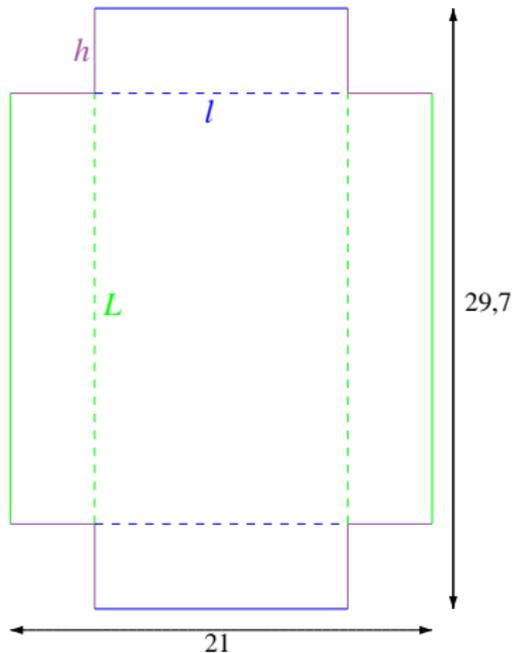
Découper un carré dans chacun des coins d'une feuille A4 pour construire une boîte parallélépipédique sans couvercle et en calculer le volume.

Construire par ce procédé la boîte dont le volume est maximal.

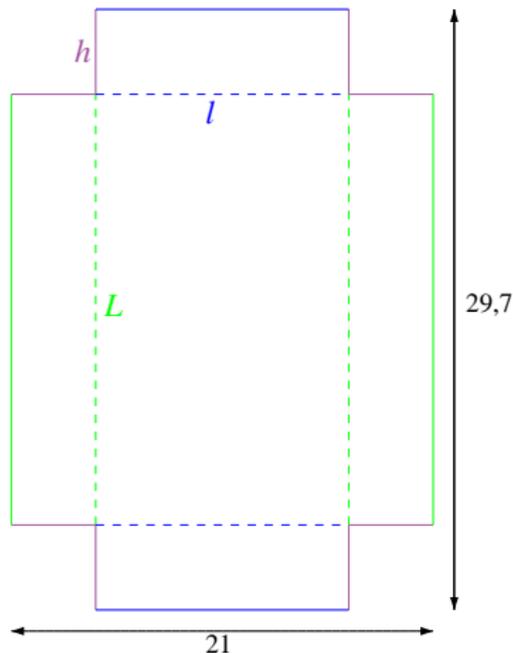




| côté en cm | | | volume en cm^3 V |
|------------------|--|--|---------------------------------------|
| x | | | |
| 1 | | | 526,3 |
| 2 | | | 873,8 |
| 3 | | | 1066,5 |
| 4 | | | 1128,4 |
| 5 | | | 1083,5 |
| 6 | | | 955,8 |
| 7 | | | 769,3 |
| 8 | | | 548 |
| 9 | | | 315,9 |
| 10 | | | 97 |

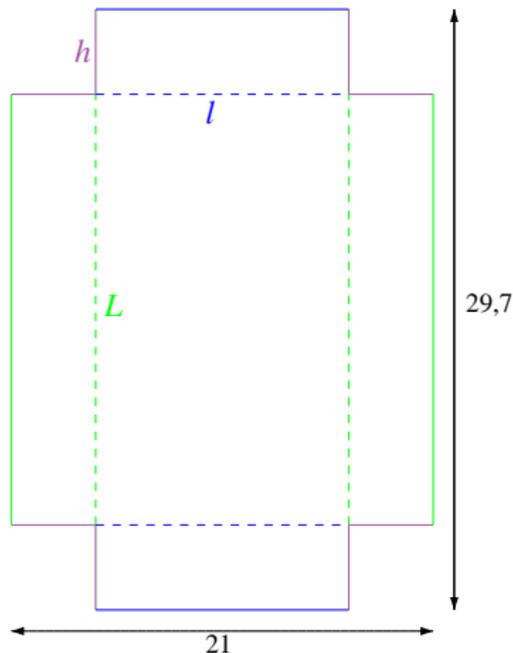


| hauteur en cm | largeur en cm | longueur en cm | volume en cm^3 |
|---------------------|------------------|-------------------|----------------------------|
| h | ℓ | L | V |
| x | | | |
| 1 | 19 | 27,7 | 526,3 |
| 2 | 17 | 25,7 | 873,8 |
| 3 | 15 | 23,7 | 1066,5 |
| 4 | 13 | 21,7 | 1128,4 |
| 5 | 11 | 19,7 | 1083,5 |
| 6 | 9 | 17,7 | 955,8 |
| 7 | 7 | 15,7 | 769,3 |
| 8 | 5 | 13,7 | 548 |
| 9 | 3 | 11,7 | 315,9 |
| 10 | 1 | 9,7 | 97 |



| hauteur en cm | largeur en cm | longueur en cm | volume en cm ³ |
|---------------------|------------------|-------------------|------------------------------|
| h | ℓ | L | V |
| x | $21 - 2x$ | $29,7 - 2x$ | $x(21 - 2x)(29,7 - 2x)$ |
| 1 | 19 | 27,7 | 526,3 |
| 2 | 17 | 25,7 | 873,8 |
| 3 | 15 | 23,7 | 1066,5 |
| 4 | 13 | 21,7 | 1128,4 |
| 5 | 11 | 19,7 | 1083,5 |
| 6 | 9 | 17,7 | 955,8 |
| 7 | 7 | 15,7 | 769,3 |
| 8 | 5 | 13,7 | 548 |
| 9 | 3 | 11,7 | 315,9 |
| 10 | 1 | 9,7 | 97 |

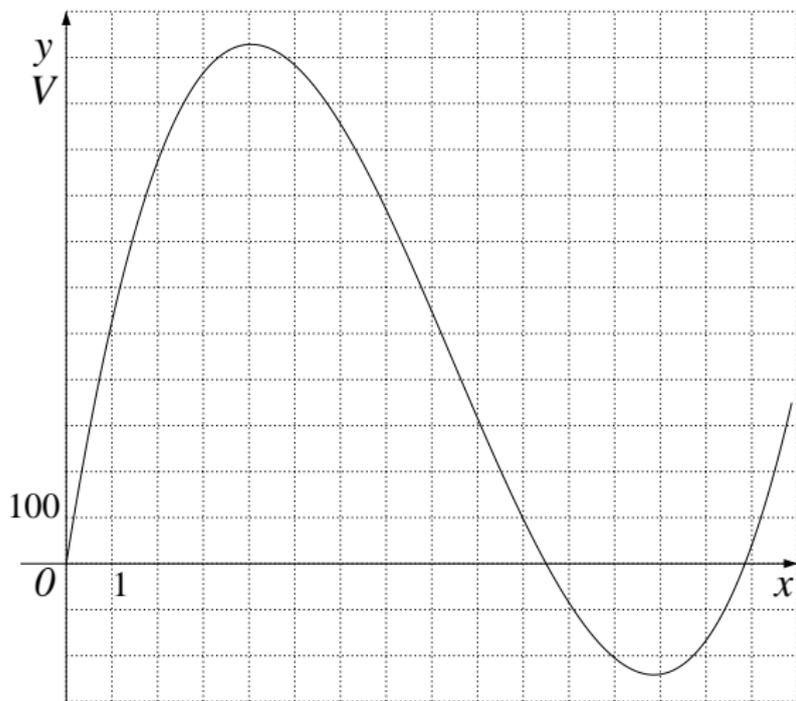
$$V(x) = x(21 - 2x)(29,7 - 2x)$$



| hauteur en cm | largeur en cm | longueur en cm | volume en cm ³ |
|---------------------|------------------|-------------------|------------------------------|
| h | ℓ | L | V |
| x | $21 - 2x$ | $29,7 - 2x$ | $x(21 - 2x)(29,7 - 2x)$ |
| 1 | 19 | 27,7 | 526,3 |
| 2 | 17 | 25,7 | 873,8 |
| 3 | 15 | 23,7 | 1066,5 |
| 4 | 13 | 21,7 | 1128,4 |
| 5 | 11 | 19,7 | 1083,5 |
| 6 | 9 | 17,7 | 955,8 |
| 7 | 7 | 15,7 | 769,3 |
| 8 | 5 | 13,7 | 548 |
| 9 | 3 | 11,7 | 315,9 |
| 10 | 1 | 9,7 | 97 |

$$V(x) = x(21 - 2x)(29,7 - 2x)$$

$x = 4$ cm réalise-t-il le maximum ?



Avec le logiciel GeoGebra

$$V(x) = x(21 - 2x)(29,7 - 2x)$$

$$V(x) = 4x^3 - 101,4x^2 + 623,7x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 202,8x + 623,7$$

$$V'(x) = 0 \text{ en } x = 4,04 \text{ ou } x = 12,73$$

$$V(x) = x(21 - 2x)(29,7 - 2x)$$

$$V(x) = 4x^3 - 101,4x^2 + 623,7x$$

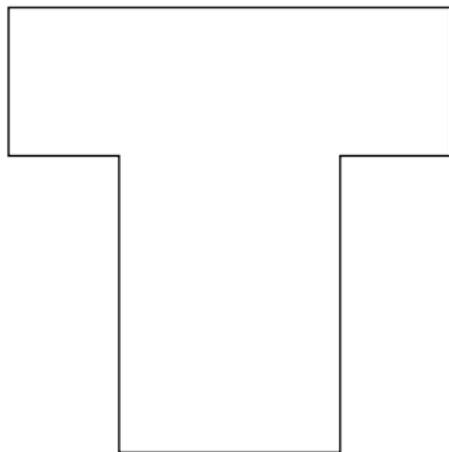
$$V'(x) = 12x^2 - 202,8x + 623,7$$

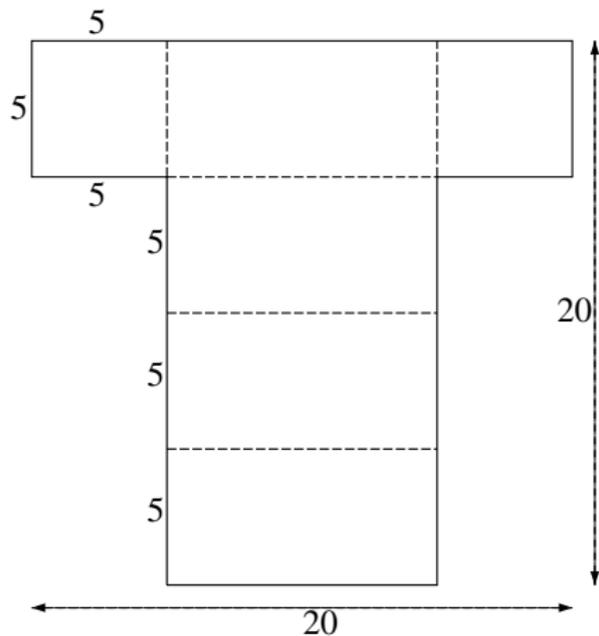
$$V'(x) = 0 \text{ en } x = 4,04 \text{ ou } x = 12,73$$

$x = 4,04$ solution admissible de l'équation $V'(x) = 0$
est ici validée par le travail sur le graphique.

En découpant symétriquement un rectangle de chaque côté d'une feuille carrée de 20 cm de côté, de façon à obtenir un T, on peut obtenir le développement d'une boîte parallélépipédique fermée.

Construire la boîte dont le volume est le plus grand possible.

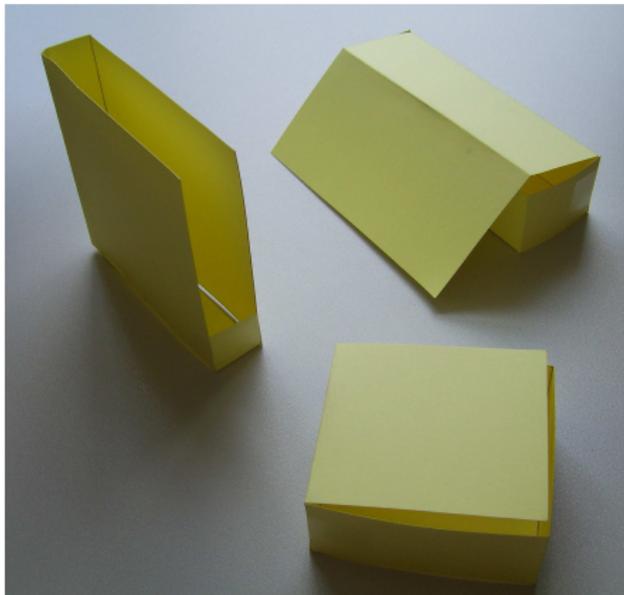


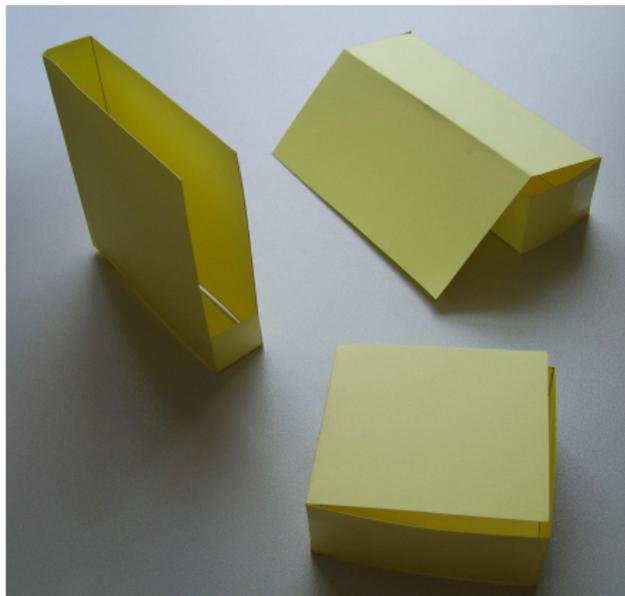


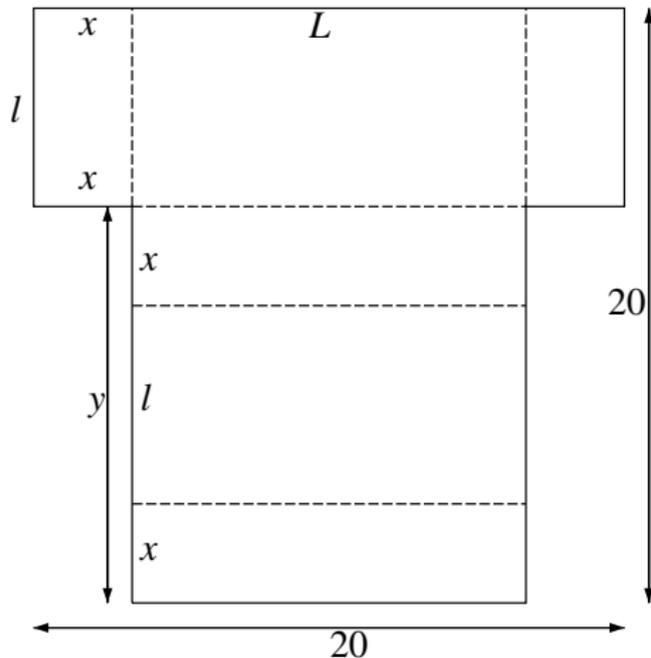
Une boîte à base carrée est
constructible, en existe-t-il
d'autres ?

Introduction
La boîte sans couvercle
La boîte parallélépipédique
Le cube
Le cône
Conclusions

Consigne
Modélisation
Graphique, dérivée







$$V = x \cdot l \cdot L$$

$$\begin{cases} 2x + 2l = 20 \\ 2x + L = 20 \end{cases}$$

ou

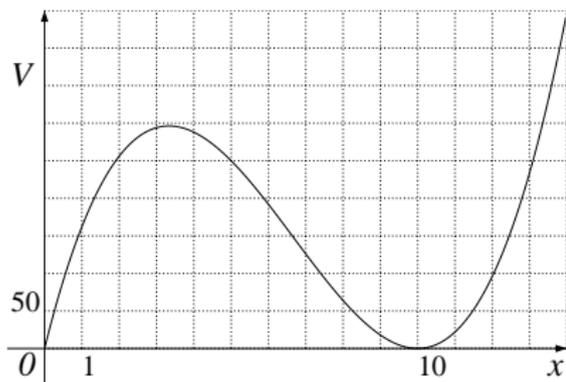
$$\begin{cases} l = 10 - x \\ L = 20 - 2x \end{cases}$$

$$V(x) = x(10 - x)(20 - 2x)$$

$$y = 20 - l = 10 + x$$

$$V(x) = x(10 - x)(20 - 2x)$$

$$V(x) = 2x^3 - 40x^2 + 200x$$



$$V'(x) = 6x^2 - 80x + 200$$

$$V'(x) = 0$$

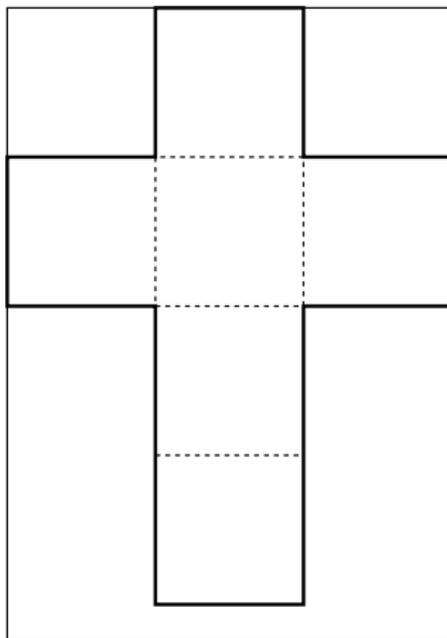
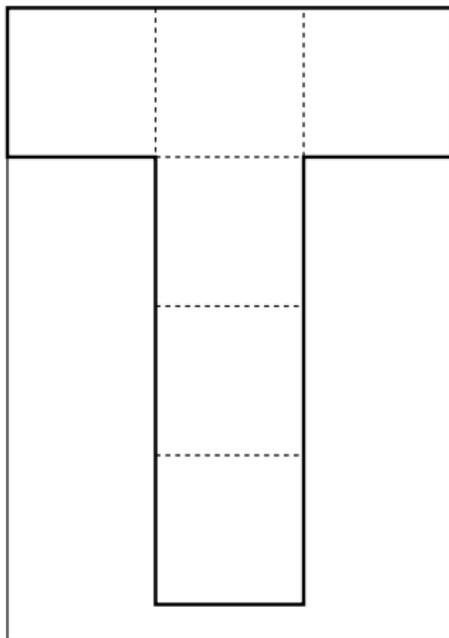
$$\text{en } x = \frac{10}{3} \text{ ou } x = 10$$

$$x_{opt} = \frac{10}{3}$$

$$\text{et } y_{opt} = \frac{40}{3} \text{ en découle.}$$

Construire dans cette feuille A4 le développement d'un cube de volume maximal.

Les découpes seront parallèles aux bords de la feuille, le développement doit être d'un seul tenant et les faces du cube entières.



Choix de la variable :
 x longueur de l'arête
du cube.

$$V(x) = x^3$$

$$\begin{cases} 3x \leq 21 \\ 4x \leq 29,7 \end{cases}$$

$$x_{opt} = 7 \text{ cm}$$

Choix de la variable :
 x longueur de l'arête
du cube.

$$V(x) = x^3$$
$$\begin{cases} 3x \leq 21 \\ 4x \leq 29,7 \end{cases}$$

$$x_{opt} = 7 \text{ cm}$$

Refaire le même exercice à partir d'une feuille A4 coupée en deux dans le sens de la longueur.

Premier système
de contraintes

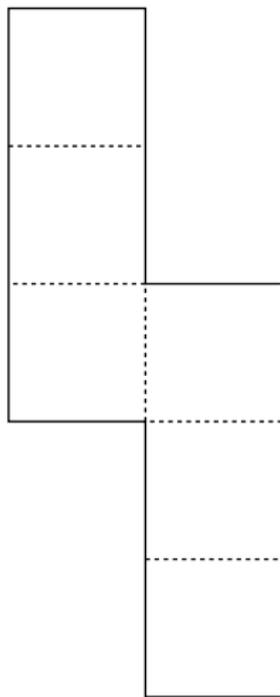
$$\begin{cases} 3x \leq 10,5 \\ 4x \leq 29,7 \end{cases}$$

$$x_{opt} = 3,5 \text{ cm}$$

Premier système
de contraintes

$$\begin{cases} 3x \leq 10,5 \\ 4x \leq 29,7 \end{cases}$$

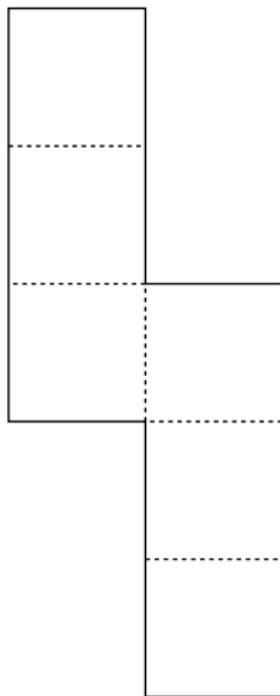
$$x_{opt} = 3,5 \text{ cm}$$



Premier système
de contraintes

$$\begin{cases} 3x \leq 10,5 \\ 4x \leq 29,7 \end{cases}$$

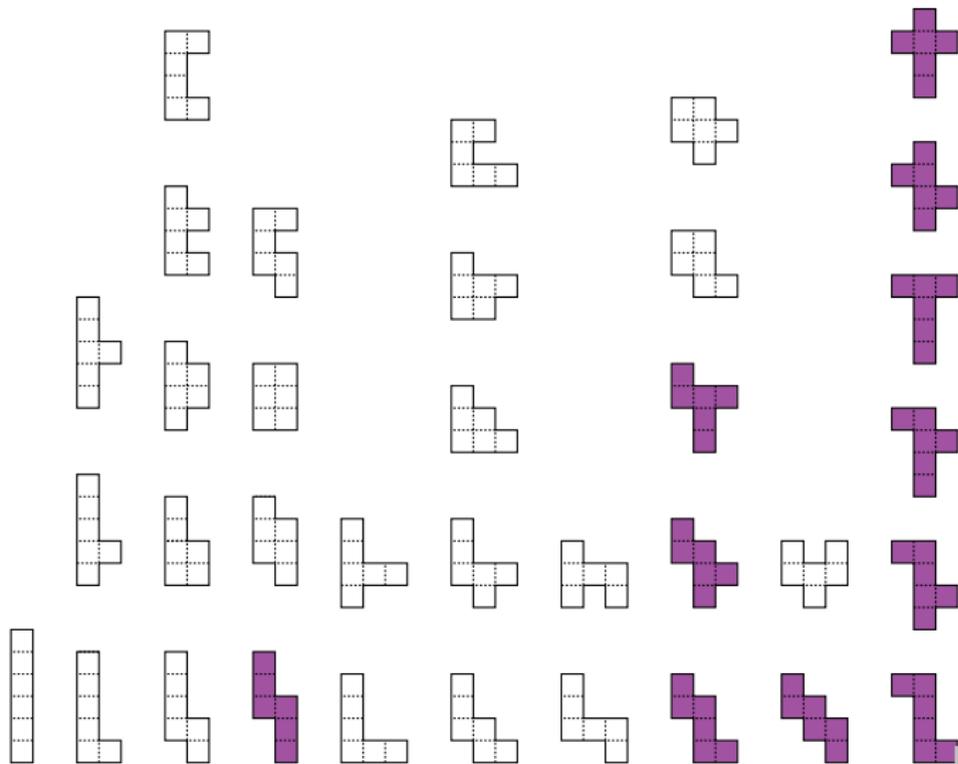
$$x_{opt} = 3,5 \text{ cm}$$



Autre système
de contraintes

$$\begin{cases} 2x \leq 10,5 \\ 5x \leq 29,7 \end{cases}$$

$$x_{opt} = 5,25 \text{ cm}$$



Déterminer l'arête du cube de volume maximal dont un développement est découpé parallèlement aux bords dans une feuille de largeur ℓ et de longueur L .

Déterminer l'arête du cube de volume maximal dont un développement est découpé parallèlement aux bords dans une feuille de largeur ℓ et de longueur L .

Développement 3x4

$$\begin{cases} 3x \leq \ell \\ 4x \leq L \end{cases}$$

$$x_{34} = \min \left\{ \frac{\ell}{3}, \frac{L}{4} \right\}$$

Développement 2x5

$$\begin{cases} 2x \leq \ell \\ 5x \leq L \end{cases}$$

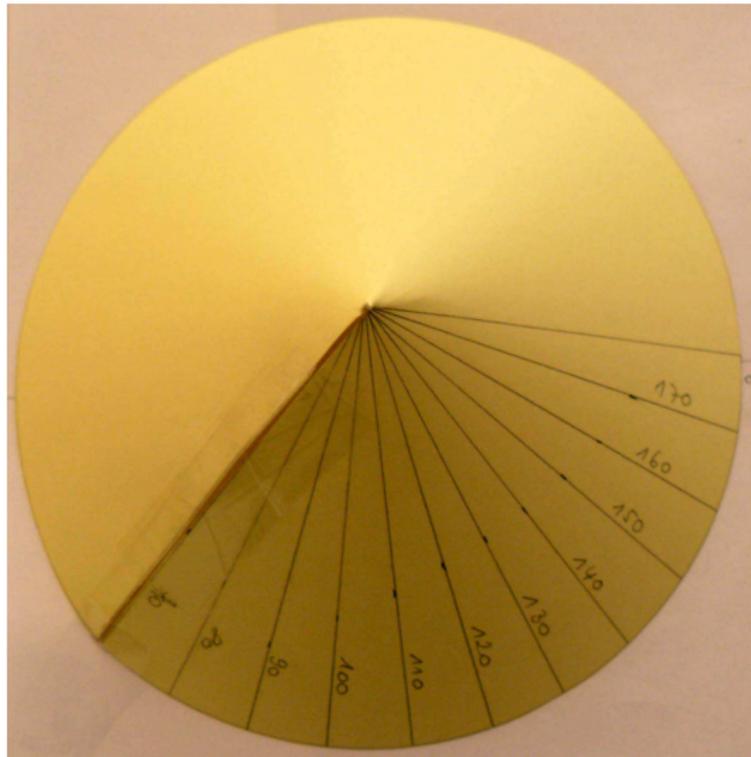
$$x_{25} = \min \left\{ \frac{\ell}{2}, \frac{L}{5} \right\}$$

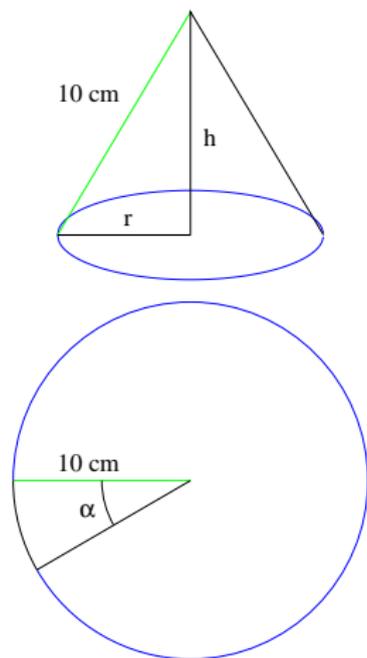
$$x_{opt} = \max \{x_{34}, x_{25}\}$$

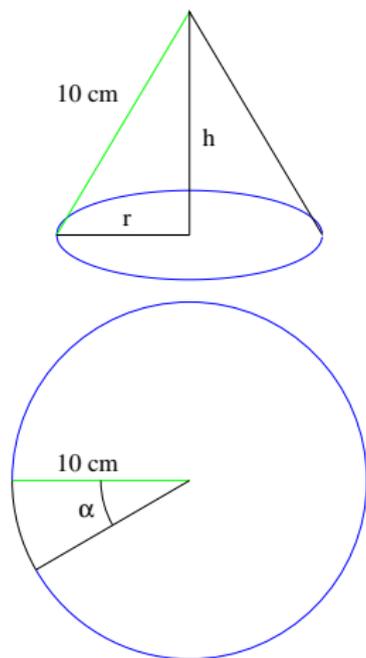
En découpant un secteur d'un disque de 10 cm de rayon, construire un cône dont le volume est le plus grand possible.

Introduction
La boîte sans couvercle
La boîte parallélépipédique
Le cube
Le cône
Conclusions

Consigne
Manipulation
Modélisation
Choix de la variable indépendante
Construction
Autres approches







$$V(h, r) = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$\begin{cases} h^2 + r^2 = 10^2 \\ (2\pi - \alpha)10 = 2\pi r \end{cases}$$

Les valeurs admissibles pour r et h sont comprises entre 0 et 10 ; celles pour α , en radians, sont comprises entre 0 et 2π .

$$\begin{cases} r = \sqrt{100 - h^2} \\ \alpha = 2\pi \frac{10-r}{10} \end{cases} \Rightarrow V(h) = \frac{\pi}{3}(100h - h^3)$$

$$\begin{cases} h = \sqrt{100 - r^2} \\ \alpha = 2\pi \frac{10-r}{10} \end{cases} \Rightarrow V(r) = \frac{\pi}{3}r^2\sqrt{100 - r^2}$$

$$\begin{cases} r = 10 \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} \\ h = \sqrt{100 - r^2} \end{cases} \Rightarrow V(\alpha) = \frac{125}{3\pi^2}(2\pi - \alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(100h - h^3)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(100 - 3h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = -\frac{\sqrt{3}}{3}10 \text{ ou } h = \frac{\sqrt{3}}{3}10$$

$$h_{opt} = \frac{\sqrt{3}}{3}10 \approx 5,77 \text{ cm}$$

$$r = \sqrt{100 - h^2} \Rightarrow r_{opt} = \sqrt{100 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}10\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}10$$
$$r_{opt} \approx 8,165 \text{ cm}$$

$$\alpha = 2\pi \frac{10-r}{10} \Rightarrow \alpha_{opt} = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$
$$\alpha_{opt} \approx 1,15 \text{ rad ou } \approx 66^\circ$$

- p périmètre de la base du cône

$$\begin{cases} r = \frac{p}{2\pi} \\ h = \sqrt{100 - r^2} \\ \alpha = 2\pi \frac{10-r}{10} \end{cases} \Rightarrow V(p) = \frac{p^2}{24\pi^2} \sqrt{400\pi^2 - p^2}$$

- x angle du secteur conservé

$$\begin{cases} \alpha = 2\pi - x \\ r = \frac{10x}{2\pi} \\ h = \sqrt{100 - r^2} \end{cases} \Rightarrow V(x) = \frac{125}{6\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

- Maximiser le carré du volume
(avec changement d'unité : dm au lieu de cm)

$$V^2(\alpha) = \frac{1}{576\pi^4} (2\pi - \alpha)^4 (4\pi\alpha - \alpha^2)$$

Objectifs

- Boîte sans couvercle
nature de l'optimisation, modélisation, variable et valeurs admissibles, tableau de valeurs, graphique, fonction, dérivée
- Boîte parallélépipédique
contraintes, variables liées et variable indépendante
- Cube
limite de l'outil dérivée, preuve
- Cône (pour sections scientifiques)
choix de la variable indépendante

Réflexions sur les problèmes d'optimisation

- Importance du contexte
- Importance de la formulation de la question
- Difficulté de la modélisation
- Outil dérivée : condition nécessaire et suffisante
- Comment peut-on s'assurer que l'on a l'extremum demandé ?

Compétences transversales

- S'approprier une situation.
- Formuler une conjecture, dégager une méthode de travail.
- Traduire une information d'un langage dans un autre, du langage graphique au langage algébrique et réciproquement.

Compétences disciplinaires

- Modéliser des problèmes de manière à les traiter au moyen des fonctions de références . . .
- Esquisser, construire un graphique pour mettre en évidence des caractéristiques du phénomène traité, interpréter un graphique en le reliant au problème qu'il modélise.

Références

- APMEP, 2003. *Projet de création d'un laboratoire de mathématiques. Lycée Mas de Tesse.*
- Bkouche, Charlot, Rouche, 1991. *Faire des mathématiques : le plaisir du sens.*
- Bkouche, 2008. Du caractère expérimental des mathématiques - À propos des laboratoires de mathématiques, *Repères-IREM*, 70.
- Borel, 1904. *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire.*
- Caron-Pargue, 1981. Quelques aspects de la manipulation, *RDM*, 2.1.
- Dias, Durand-Guerrier, 2005. Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères-IREM*, 60.
- Dias, 2009. La dimension expérimentale en mathématiques, *Grand N*, 83.
- Guissard, Henry, Lambrecht, Van Geet, Vansimpson, Wettendorff, 2014. Math & Manips pour le secondaire supérieur : problèmes d'optimisation, *Losanges*, 24.
- Henry, Lambrecht, 2012. Compétences en Communauté française de Belgique : illustration via l'introduction de manipulations en classe, *Repères-IREM*, 88.
- Ministère de la Communauté française, 1999. *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques.*

Merci pour votre attention
et votre participation, des questions ?



e-mail : info@crem.be
site web : www.crem.be