

WIND-ENERGIE & WISKUNDE



Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.

CAHIER KW02 : Windenergie en Wiskunde (SO)

INLEIDING

STEM is een internationaal erkend Engelstalig letterwoord om volgende disciplines en hun interactie te omschrijven:

S (science) = wetenschappen

T (technology) = techniek

E (engineering) = ingenieurswetenschappen

M (mathematics) = wiskunde



Onderwijsoverheden in Vlaanderen en Nederland stimuleren STEM als een interdisciplinaire manier om belangrijke wetenschappelijke, wiskundige, technische en engineering-gelinkte kennisinhouden, vaardigheden en attitudes in het curriculum op te nemen.

STEM behandelt daarbij toekomstverkennde thema's van onze samenleving. Denken we maar aan de uitdagingen rond duurzaamheid, mobiliteit, energie, gezondheid en welzijn, nieuwe media, kunst, cultuur en design...

Windenergie is een uitgelezen STEM-thema.

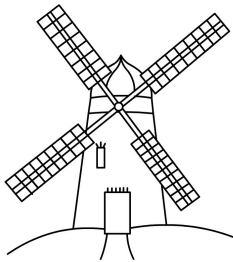
In deze brochure wordt gefocust op de leerinhouden die aan bod kunnen komen in een STEM-project rond windenergie, met speciale aandacht voor de link met het curriculum wiskunde en de terminologie zoals in het middelbaar wiskundeonderwijs gebruikelijk. De leerinhouden van fysica worden vrij beknopt behandeld, maar wel, waar mogelijk en nodig, met de nodige gestrengheid aangebracht.

De doelstelling van deze brochure is om leraars wiskunde achtergrondinformatie en bruikbare ideeën te geven om samen te werken met de STEM-collega's van de andere disciplines .

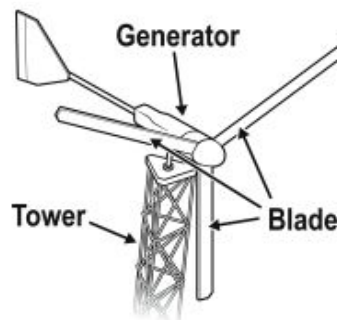
1. WINDENERGIE

Al duizenden jaren maken mensen gebruik van windenergie.

Met zeilboten voer men de zeven wereldzeeën, met windmolens werd graan gemalen en water opgepompt.



Vandaag wordt windenergie ook gebruikt als energiebron voor elektriciteit. Hiervoor gebruikt men windturbines. Sinds de 20^{ste} eeuw is de vraag naar elektriciteit enorm toegenomen en het aantal elektrische apparaten stijgt nog steeds.

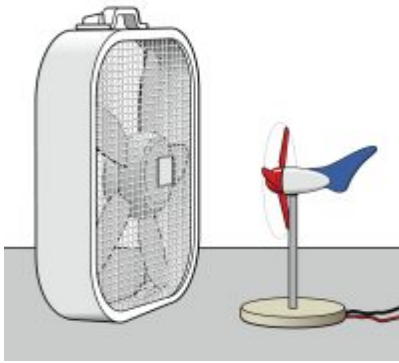


Bijvoorbeeld zal door windenergie opgewekte elektriciteit een belangrijke energiebron worden voor de auto van de toekomst.



Windenergie is, samen met zonne- en getijdenenergie, een groen alternatief voor milieuvriendelijke en vergankelijke fossiele energiebronnen zoals steenkool, aardgas en petroleum.

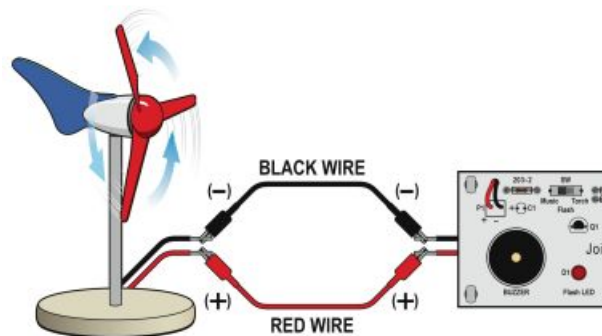
De toenemende aandacht voor hernieuwbare, duurzame energie veroorzaakt een geweldige groei in de vraag naar wetenschappers, ingenieurs en technici.



Om kennis te maken met windenergie, kan je een mini-windturbine voor een ventilator op ongeveer 15 cm plaatsen en er een lampje of een muziekdoosje op aansluiten.

Door de wind van de ventilator gaan de wieken van de turbine draaien.

De hierdoor opgewekte elektrische energie zal een lampje doen branden of een muziekje doen afspelen.



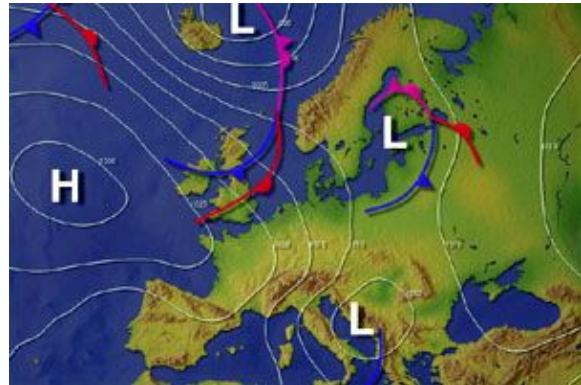
In dit hoofdstuk zullen we het begrip “windenergie” definiëren uitgaande van de basiswetten van de natuurkunde.

In een volgende hoofdstuk zullen we dan analoog het begrip “elektrische energie” definiëren.

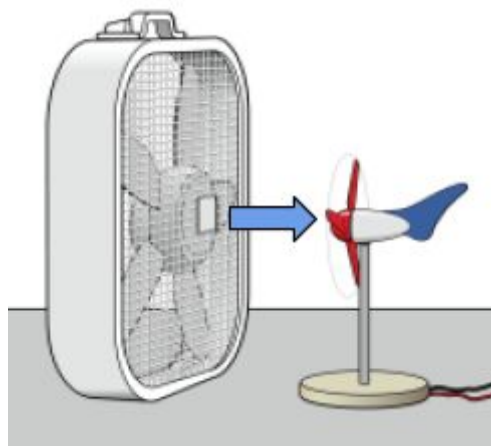
A. Wat is wind ?

Wind is de beweging van een luchtmassa, veroorzaakt door het verschil in atmosferische druk op twee plaatsen op aarde.

Wind verplaatst zich van een hogedrukgebied naar een lagedrukgebied omdat de atmosferische druk op de luchtmassa een kracht uitoefent.



Hoewel de luchtcirculatie in onze atmosfeer een complex en 3-dimensionaal natuurfenomeen is, kunnen we wind die op een windmolen waait lokaal beschouwen als een 1-dimensionale, rechtlijnige beweging.



Daarom onderzoeken we de eerst rechtlijnige beweging van een voorwerp (een massapunt) dat onder invloed staat van een kracht evenwijdig aan de bewegingsrichting¹.

¹ Om die reden worden alle fysische grootheden niet vectoriëel voorgesteld. In formules stellen de symbolen van vectoriële grootheden dus eerder de grootte (positief reëel getal) van die vector voor. Er wordt abstractie gemaakt van de richting en zin van de vectoren.

B. Rechthoekige beweging: positie, snelheid, versnelling

De **positie** van een punt op een rechte wordt gegeven door zijn ordinaat s .



De eenheid van positie is meter (m).

Als het punt zich beweegt op de rechte, dan is s een functie van de tijd t : $s = s(t)$

De **snelheid** v van een bewegend punt op een rechte is de mate waarin het van positie verandert per tijdseenheid.

De eenheid van snelheid is meter per seconde (m/s).

Afhankelijk van de wiskundige voorkennis van de leerlingen wordt snelheid gedefinieerd als :

$$v_{gem} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad v(t) = \frac{ds}{dt}$$

Voorbeeld : een beweging met constante snelheid noemt men een eenparig rechtlijnige beweging.

Als $v(t) = v_0$, dan is : $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t$. De positie s is dan een eerstegraadsfunctie van t .

De constante snelheid v_0 is de richtingscoëfficiënt van een eerstegraadsfunctie. Deze richtingscoëfficiënt kan ook berekend worden als het differentiequotiënt op een tijdsinterval.

De **versnelling** a van een bewegend punt op een rechte is de mate waarin het van snelheid verandert per tijdseenheid.

De eenheid van versnelling is meter per seconde kwadraat (m/s²).

Afhankelijk van de wiskundige voorkennis van de leerlingen wordt versnelling gedefinieerd als:

$$a_{gem} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Voorbeeld : een beweging met constante versnelling noemt men een eenparig versnelde beweging.

Als $a(t) = a_0$, dan is :

- $v(t) = v_0 + a_0 \cdot t$. De snelheid v is dan een eerstegraadsfunctie van t .
- $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2$. De positie s is dan een tweedegraadsfunctie van t .

C. Kracht : wetten van Newton

Een **kracht** F is een fysische grootheid die een object van snelheid doet veranderen, dus een versnelling geeft.



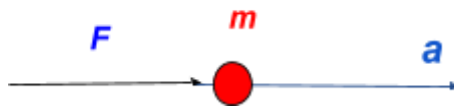
De **eerste wet van Newton** zegt dat een voorwerp enkel en alleen van snelheid kan veranderen als er een kracht op inwerkt.

Andere formuleringen of afleidingen van deze wet zijn :

- Om de bewegingstoestand (richting, zin of grootte van de snelheid) van een voorwerp te veranderen, is een kracht nodig.
- Een voorwerp waarop geen kracht inwerkt, is in rust of beweegt zich in een rechte lijn met een constante snelheid voort.

De **tweede wet van Newton** zegt dat wanneer een kracht op een voorwerp inwerkt, de resulterende snelheidsverandering (= de versnelling) recht evenredig is met de kracht.

$$F = m \cdot a$$



Hierbij is :

- m = de massa van het voorwerp. De eenheid van massa is gram (g).
- a = de versnelling van het voorwerp. De eenheid van versnelling is meter per seconde kwadraat (m/s^2).
- F = de grootte van de kracht. De eenheid van kracht is de newton (N).
- De eenheid newton is gedefinieerd als de kracht die een massa van 1 kilogram een versnelling van 1 m/s^2 geeft. Dus 1 newton is 1 kilogram-meter per seconde kwadraat.

D. Arbeid

Als een kracht met constante grootte F wordt uitgeoefend op een voorwerp met massa m en het voorwerp hierdoor wordt verplaatst in de richting van de kracht over een afstand d , dan definiëren we de verrichte arbeid als het product van de grootte van de kracht met de afstand.

$$W = F \cdot d$$

Hierbij is :

- d = de afstand van verplaatsing. De eenheid van afstand is de meter (m).
- W = de arbeid. De eenheid van arbeid is de joule (J).
- Een eenheid joule is gedefinieerd als de arbeid die verricht wordt als een object verplaatst wordt met een kracht van 1 newton over een afstand van 1 meter.

E. Kinetische energie

Een voorwerp dat zich voortbeweegt aan een zekere snelheid bezit de mogelijkheid om arbeid te verrichten. Bijvoorbeeld zal wind arbeid kunnen verrichten door in een windmolen graan te malen of op zee een zeilboot te laten varen.

Deze mogelijkheid omschrijft men door te zeggen dat het voorwerp “kinetische energie” bezit.

De kinetische energie van een voorwerp is gelijk aan de arbeid die het kan verrichten dankzij zijn bewegingstoestand. De eenheid van energie is dan ook de joule (J).

De kinetische energie van een zich rechtlijnig voort bewegend voorwerp noemt men ook de kinetische translatie-energie.

Om de totale kinetische translatie-energie van een voorwerp te berekenen, redeneren we als volgt.

Beschouwen we een voorwerp in rechtlijnige beweging met massa m met op een bepaald ogenblik $t = 0$ een snelheid v_0 .

Als het bewegend voorwerp op dat ogenblik arbeid begint te leveren, vermindert zijn kinetische energie en dus zijn snelheid. Als het voorwerp al zijn kinetische energie heeft omgezet in arbeid, zal het snelheid nul hebben.

De totaal omgezette arbeid hangt niet af van de manier waarop de snelheid daalt van v_0 naar 0. We zullen daarom de kinetische energie berekenen in het eenvoudige geval van een eenparig versnelde beweging, dus waarbij de daling van de snelheid (de versnelling) constant is.

Stel dat het voorwerp vanaf tijdstip $t = 0$ begint te vertragen met een constante versnelling a en op het ogenblik $t = t_0$ tot rust komt en dus al zijn kinetische energie heeft omgezet in arbeid.

De snelheid v van het voorwerp is dan een eerstegraadsfunctie van t met waardentabel:

t	0	t_0
v	v_0	0

Het voorschrift van deze functie is dus : $v(t) = v_0 + \frac{v_0-0}{0-t_0}.t = v_0 - \frac{v_0}{t_0}.t$

Bijgevolg: $a = - \frac{v_0}{t_0}$

De grootte van de kracht die op het voorwerp inwerkt om de vertraging te bewerkstelligen is volgens de tweede wet van Newton (in absolute waarde) :

$$F = m \cdot \frac{v_0}{t_0}$$

Om de arbeid te berekenen die deze kracht F heeft geleverd in de periode van $t = 0$ tot $t = t_0$, moeten we ook de afstand kennen die het voorwerp in dit tijdsinterval heeft afgelegd.

$$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{v_0}{t_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \text{ geeft : } d = s(t_0) = v_0 \cdot t_0 - \frac{v_0}{t_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot t_0^2 = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t_0$$

De arbeid van de kracht F over deze afstand d is dus:

$$F \cdot d = m \cdot \frac{v_0}{t_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot t_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

Besluit :

Kinetische energie of bewegingsenergie is een vorm van energie die een voorwerp heeft vanwege de haar snelheid en is recht evenredig met de massa en (voor een rechtlijnige beweging) het kwadraat van de snelheid.

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

F. Vermogen

Het **vermogen** van een voorwerp dat energie omzet in arbeid, is de mate waarin die energie wordt omgezet naar arbeid per tijdseenheid.

Afhankelijk van de wiskundige voorkennis van de leerlingen wordt vermogen gedefinieerd als:

$$P_{gem} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad P(t) = \frac{d}{dt}(W(t))$$

Of, aangezien de hoeveelheid omgezette energie gelijk is aan de hoeveelheid arbeid die door de omzetting wordt verricht, ook:

$$P_{gem} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \qquad P(t) = \frac{d}{dt}(E(t))$$

De eenheid van vermogen is de watt (W). De eenheid watt is gedefinieerd als het vermogen van 1 joule per seconde (J/s).

G. Kinetisch vermogen

Beschouwen we een voorwerp met massa m met op een bepaald ogenblik een snelheid v .

Zijn kinetische energie is op dat moment : $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Als dit bewegend voorwerp dan arbeid begint te leveren omdat er een kracht wordt uitgeoefend (bijvoorbeeld als wind tegen de wieken van een molen waait), vermindert zijn kinetische energie en dus zijn snelheid.

Wegens de eerste wet van Newton is deze snelheidsverandering enkel mogelijk door de inwerking van een kracht, die we F noemen.

Het kinetisch vermogen P_k is de mate per tijdseenheid waarmee het voorwerp op dat bepaald ogenblik zijn kinetische energie omzet in arbeid.

Deze berekenen we als volgt :

$$P_k = \frac{d}{dt}(E_k) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot v \cdot a$$

Volgens de tweede wet van Newton is $m \cdot a = F$. Hieruit volgt:

Het **kinetische vermogen** van een voorwerp in rechtlijnige beweging met op een bepaald moment t een snelheid v en dat onder invloed van een kracht F zijn kinetische energie omzet in arbeid, is:

$$P_k(t) = F \cdot v$$

H. Andere energievormen, wet van behoud van energie

Kinetische translatie-energie is één vorm van energie.

In de natuur kunnen voorwerpen en systemen nog vele andere vormen van energie bezitten waarmee ze andere vormen van arbeid kunnen leveren.

Zo onderscheidt men o.a., naast kinetische translatie-energie : kinetische rotatie-energie, warmte-energie, lichtenergie, elektrische energie, gravitatie-energie, kernenergie, stralingsenergie, chemische energie, magnetische energie, elektromagnetische energie, elastische energie, geluidsenergie, nutritionele energie (in voeding),

Elke energie kan getransformeerd worden tot energie van een andere vormen.

Zo bijvoorbeeld wordt met een windturbine kinetische translatie-energie van de wind eerst getransformeerd tot kinetische rotatie-energie van de wieken en dan tot elektrische energie. Nadien kan die elektrische energie worden getransformeerd tot licht, warmte, geluid, beweging, enz...

De wet van behoud van energie stelt dat tijdens deze transformaties, de totale hoeveelheid energie in een geïsoleerd systeem constant blijft.

In een geïsoleerd systeem kan geen energie kan bijgemaakt worden of verloren gaan.

Het begrip arbeid/energie en hun eenheid joule, die hun basisdefinitie vinden in de rechtlijnige beweging van een massapunt onder invloed van een kracht ($W=F \cdot d$), kan uitgebreid worden tot alle andere vormen van energie dankzij deze wet van behoud van energie. Voor elke andere energievorm kan een equivalent geformuleerd worden voor de joule als eenheid van arbeid en energie.

Bijvoorbeeld is de calorische definitie van een joule : 1 joule is de thermische energie nodig om bij een normale atmosferische druk van 1013 hPa, 0.2057 gram water van 14,5 °C naar 15,5 °C te laten stijgen.

Analoog heeft men voor alle vormen van energie een equivalent voor het begrip vermogen en zijn eenheid watt.

In een volgende hoofdstuk zullen we de begrippen “elektrische energie en vermogen” definiëren uitgaande van de basiswetten van de natuurkunde.

2. ELEKTRISCHE ENERGIE

A. Elektrische lading : de wet van Coulomb

Proefondervindelijk wordt vastgesteld dat sommige stoffen in een toestand kunnen worden gebracht waarin ze elkaar aantrekken of afstoten.

Bijvoorbeeld een plastic of hoornen kam die krachtig met een wollen doek wordt opgewreven zal (droge en gewassen) haren aantrekken. Men zegt dan dat de kam “geëlektriseerd” is of “een elektrische lading” bezit.

De elektrische lading q van een voorwerp is een fysische grootte die aan een object een aantrekkings- of afstotingskracht geeft ten opzicht van andere objecten met een elektrische lading.

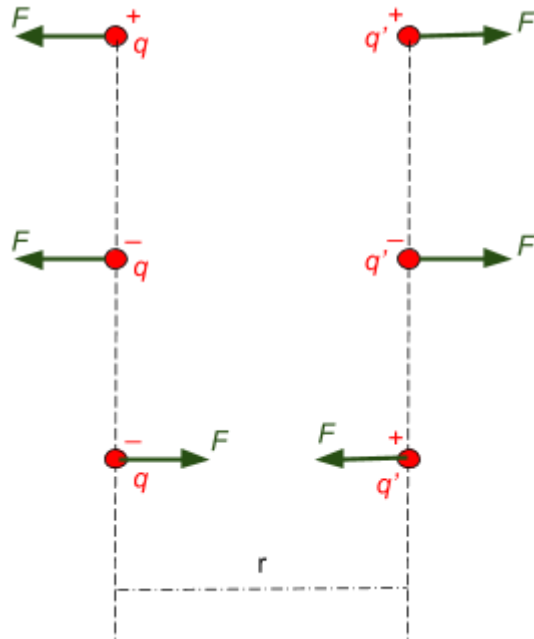
De eenheid van lading is de coulomb (C).

De **wet van Coulomb** zegt dat de aantrekkings- of afstotingskracht tussen twee elektrisch geladen lichamen recht evenredig is met de grootte van hun ladingen en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun onderlinge afstand.

$$F = k \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2}$$

De evenredigheidsfactor $k = 9 \cdot 10^9$.

De eenheid coulomb is gedefinieerd als de elektrische lading die op een andere identieke lading op 1 meter afstand een afstotende kracht uitoefent van $9 \cdot 10^9$ Newton.



B. Atoomstructuur : vrije elektronen

Om elektrische lading te begrijpen is het nodig de inwendige bouw van een atoom te kennen.

Alle materie bestaat uit atomen. Een atoom bestaat uit twee gebieden.

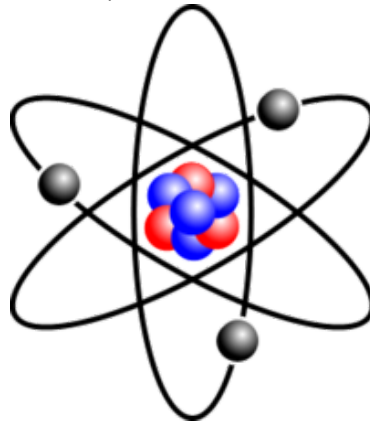
De **kern** bestaat uit protonen en neutronen. Protonen zijn positief geladen. Neutronen zijn niet geladen, ze zijn elektrisch neutraal.

Rond de kern bewegen zich de **elektronen**. Elektronen zijn negatief geladen.

In een atoom is de positieve lading van een proton en de negatieve lading van een elektron in grootte gelijk.

Het aantal protonen en het aantal elektronen in een atoom zijn gelijk, dus een atoom is elektrisch neutraal.

Dit atoommodel kan vergeleken worden met een zonnestelsel waarbij de elektronen rond de kern bewegen zoals planeten rond een zon.



Elk elektron heeft zijn eigen afstand tot de kern.

Naast de afstotingskrachten tussen de positieve kern en de negatieve elektronen zijn er in het atoom ook aantrekkingskrachten werkzaam met als gevolg dat in een atoom de elektronen aan de kern stabiel zijn gebonden.

Echter, in sommige stoffen (bijvoorbeeld koper, ijzer, zout water, grafiet,) zijn de elektronen die verder verwijderd zijn van de kern, niet zo stevig aan die kern verbonden. Door een externe oorzaak kunnen deze elektronen zich losmaken uit het atoom. Zo verandert het atoom in een positief geladen ion. Deze materie kan dan opgevat worden als een verzameling van ionen waartussen zich “vrije” elektronen kunnen bewegen.

Een voorwerp kan worden “geëlektriseerd” door het verkrijgen of verliezen van vrije elektronen : het krijgt dan een elektrische lading.

Een voorwerp dat een tekort aan elektronen heeft is positief geladen.

Een voorwerp dat een teveel aan elektronen heeft is negatief geladen.

C. De elektrische stroomkring

Onderzoeken we eerst twee eenvoudige voorbeelden.



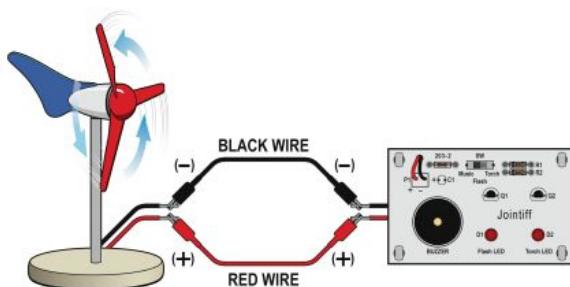
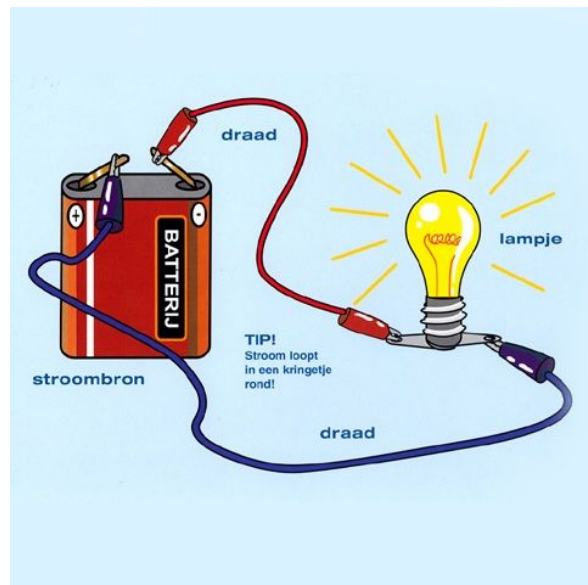
Een zaklamp bestaat uit een batterij en een lampje die op een bijzondere manier met elkaar zijn verbonden, zoals voorgesteld in onderstaand schema.

Dit schema is een voorbeeld van een elektrische stroomkring.

We onderscheiden in deze stroomkring drie onderdelen:

- de batterij
- de geleiders (metalen draden)
- het lampje

Onder invloed van de batterij zullen de vrije elektronen in de geleiders zich doorheen de stroomkring bewegen en in het lampje een gloeidraad opwarmen die dan licht geeft.



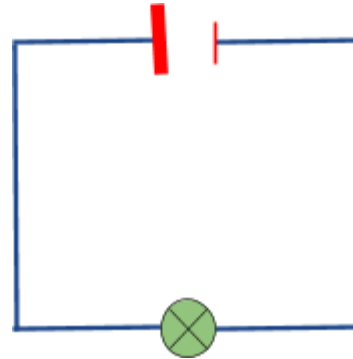
Een ander voorbeeld van een elektrische stroomkring is deze van een windturbine en een muzikdoosje.

Onder invloed van de generator in de windturbine zullen de vrije elektronen in de geleiders zich doorheen de stroomkring bewegen en in het muzikdoosje trillingen (muziek) opwekken.

Meer algemeen kunnen we een elektrische stroomkring voorstellen door nebenstaand schema.

We onderscheiden in een elektrische stroomkring:

- de bron
- de geleiders
- de verbruiker

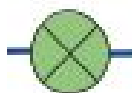


Bronnen in een elektrische stroomkring zijn bijvoorbeeld een batterij, een generator, een stopcontact, ...



Door een externe oorzaak, bijvoorbeeld van chemische (in een batterij) of mechanische (in een turbine) aard wordt er in de bron een ophoping van elektronen aan de negatieve pool en een tekort aan elektronen aan de positieve pool aangehouden.

De geleiders in een elektrische stroomkring zijn vervaardigd uit een metaal dat vele vrije elektronen heeft, bijvoorbeeld koper.



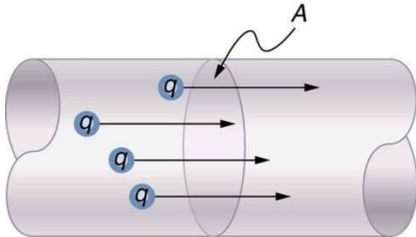
Verbruikers in een elektrische stroomkring zijn bijvoorbeeld een lamp, een motor, een deurbel, een verwarmingselement,

Wanneer de polen van de bron en van de verbruiker verbonden worden door de geleiders, dan beginnen de vrije elektronen in de geleiders te bewegen van de ene bronpool naar de andere, doorheen de verbruiker, waar ze arbeid verrichten. De arbeid die de verbruiker levert, kan van mechanische, thermische of andere aard zijn.

De “sterkte” van een elektrische bron wordt bepaald door het verschil in lading tussen de twee polen van de bron. De negatieve pool kent een ophoping van negatieve elektronen en de positieve pool

een tekort aan elektronen. Deze “sterkte” wordt gemeten met twee grootheden : stroom en spanning.

De stroom(-sterkte) in een elektrische stroomkring is de mate waarin de lading van de elektronen doorheen de stroomkring beweegt per tijdseenheid.



Elektrische stroom wordt voorgesteld door de letter I (van Intensiteit).

Afhankelijk van de wiskundige voorkennis van de leerlingen wordt stroomsterkte gedefinieerd als :

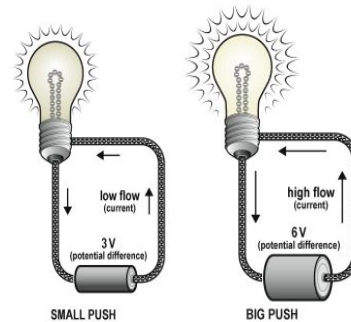
$$I_{gem} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad I(t) = \frac{dq}{dt}$$

Stroomsterkte wordt gemeten met de ampère (A) als eenheid.

De eenheid ampère is gedefinieerd als de hoeveelheid coulomb in een elektrische stroomkring die gedurende 1 seconde doorheen de kring stroomt.

De eenheid A is gelijk aan 1 coulomb per seconde (C/s).

De spanning (of het potentiaalverschil) in een elektrische stroomkring is de mate waarin arbeid wordt geleverd per ladingseenheid.



Elektrische spanning wordt voorgesteld door de letter U (van het Duitse woord Unterschied).

Afhankelijk van de wiskundige voorkennis van de leerlingen wordt spanning gedefinieerd als :

$$U_{gem} = \frac{\Delta W}{\Delta q} \quad U(t) = \frac{dW}{dq}$$

Elektrische spanning wordt gemeten met de volt (V) als eenheid.

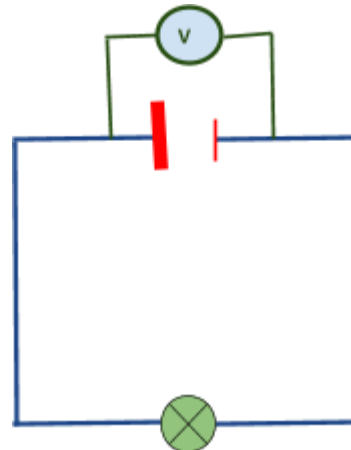
De eenheid volt is gedefinieerd als de spanning in een elektrische stroomkring waarbij een lading van 1 coulomb een arbeid van 1 joule genereert.

De eenheid V is gelijk aan 1 joule per coulomb (J/C).

D. Meten in een stroomkring

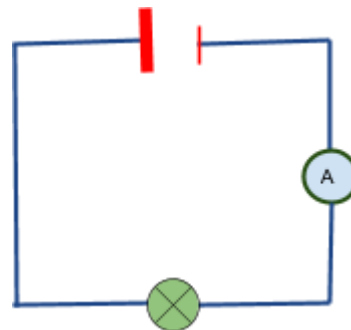
De spanning in een stroomkring meet je tussen de twee polen van de bron (en/of van de verbruiker).

Je meetapparaat plaats je “parallel” met de bron (en de verbruiker).



De stroom in een stroomkring meet je tussen een pool van de bron en de daarop volgende pool van de verbruiker.

Je meetapparaat plaats je “in serie” met de bron en de verbruiker.



Spanning en stroom in een stroomkring kan je meten met een multimeter.

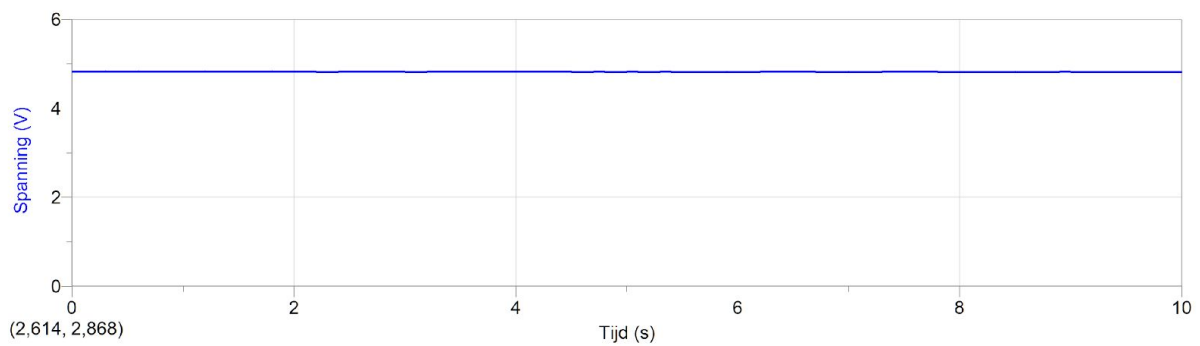
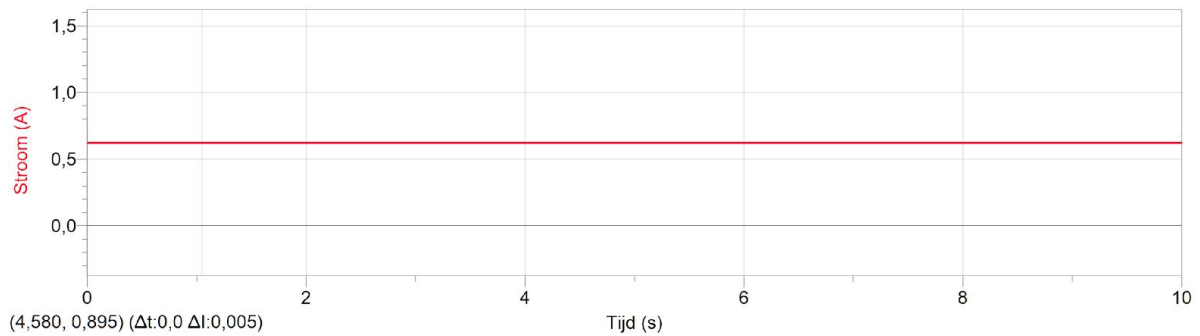
Deze zijn goedkoop verkrijgbaar in Doe-Het-Zelf-zaken.



Maar in een STEM-project is het interessanter om deze elektrische grootheden te meten met sensoren en deze metingen over een zekere periode grafisch voor te stellen.

Hiertoe verbind je een stroom- en een spanningssensor via een interface aan een computer, tablet of rekentoestel en start je een datalogging-applicatie op.

Wanneer je een stroomkring met een batterij en een lampje construeert, een stroom- en spanningssensor correct in de stroomkring plaatst, en hierop metingen gedurende enkele seconden uitvoert, dan bekom je grafieken van de functies $I = I(t)$ en $U = U(t)$ zoals:



Telkens is dit de grafiek van een **constante functie**.

Respectievelijk is de vergelijking bijvoorbeeld :

- $I = 0,6 \text{ A}$
- $U = 5 \text{ V}$

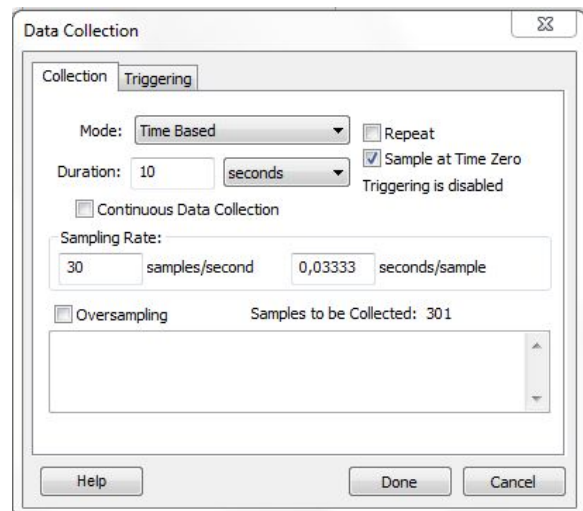
Als de bron in een elektrische stroomkring een constante stroom en spanning produceert, dan noemt men dit **gelijkstroom**.

Het is belangrijk dat we begrijpen hoe deze grafieken worden gegenereerd door de software.

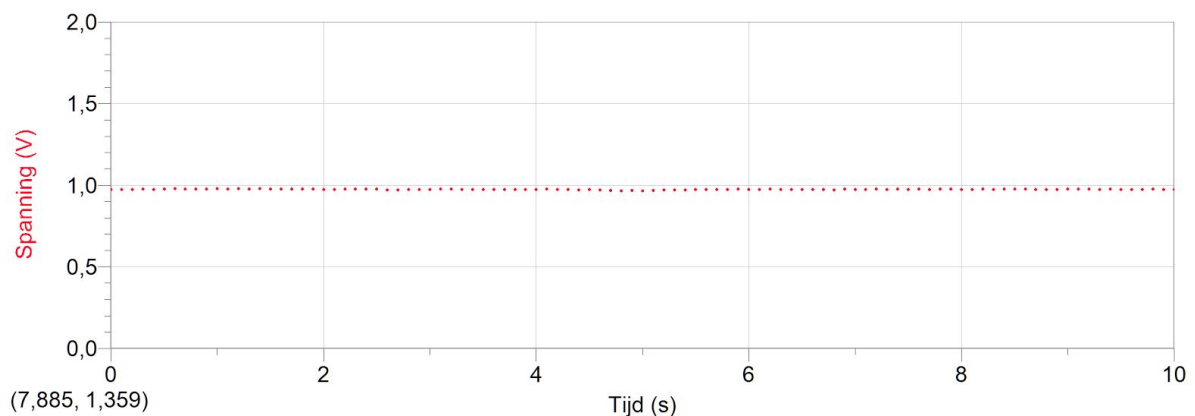
De resolutie van de metingen wordt bepaald door het aantal metingen per seconde.

In het voorbeeld hiernaast wordt 10 seconden lang gemeten met 30 metingen per seconden.

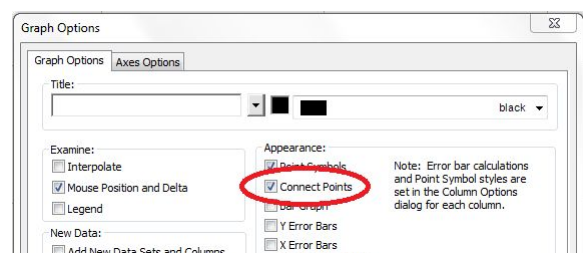
In totaal zullen dan 301 meetwaarden worden geregistreerd.



Alle bekomen meetwaarden kunnen worden voorgesteld in een tabel. De grafische voorstelling van deze functiewaardentabel is een **puntenwolk**.



Je kan in elk grafiek-programma instellen of de opeenvolgende grafiekpunten al dan niet verbonden moeten worden.



E. Weerstand : wet van Ohm

Georg Ohm (1787-1854) was een Duitse wis- en natuurkundige. Hij ontdekte proefondervindelijk het verband tussen elektrische spanning en stroom in een elektrische stroomkring en legde die vast in een formule. De wet van Ohm luidt :

*De stroom in een stroomkring en de spanning op die stroomkring zijn **recht evenredig**.*

De **evenredigheidsfactor** tussen de spanning U en de stroom I stellen we voor door de letter R .

De wet van Ohm is in formulevorm:

- $U = R.I$ (voor gelijkstroom)
- of meer algemeen : $U(t) = R.I(t)$

Gevolgen van deze wet zijn :

- Bij constante spanning U zal een grotere R een kleinere stroomsterkte I tot gevolg hebben en omgekeerd zal een kleinere R een grotere I toelaten.
- In een stroomkring met grote R heb je een grotere spanning U nodig om eenzelfde stroom I te genereren.

Deze uitspraken geven aan dat de grootheid R kan beschouwd worden als de mate waarin de elektronenstroom in de stroomkring “geremd” wordt, of : een zekere “weerstand” ondervindt.

Daarom noemt met de grootheid R **de weerstand** van de stroomkring.

- Bij constante spanning zal een grotere weerstand een kleinere stroomsterkte tot gevolg hebben en omgekeerd zal een kleinere weerstand een grotere stroomsterkte toelaten.
- In een stroomkring met grotere weerstand heb je een grotere spanning nodig om dezelfde stroomsterkte te genereren.

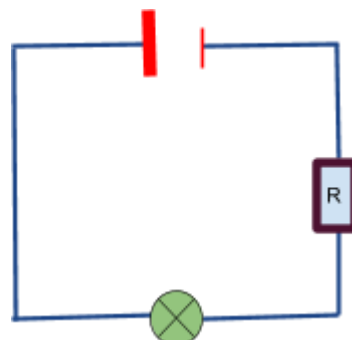
De eenheid van weerstand is de ohm (Ω).

De eenheid ohm is gedefinieerd als de weerstand van een stroomkring die bij een spanning van 1 volt een stroomsterkte van 1 ampère geeft.

Voor de weerstand in een stroomkring heb je geen aparte sensor nodig als je al de spanning en stroom meet.

Je kan deze in de software laten berekenen met de formule $R = \frac{U}{I}$ en deze dan grafisch voorstellen.

Om de weerstand van een stroomkring te wijzigen, kan je een extra weerstand toevoegen.



F. Elektrisch vermogen

De elektronenstroom in een stroomkring stroomt doorheen de verbruiker en de elektrische energie wordt daar omgezet in arbeid.

Het vermogen is per definitie steeds de hoeveelheid gegenereerde arbeid per tijdseenheid.

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \text{ of } P(t) = \frac{dW}{dt}$$

In een elektrische stroomkring² is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = U$ en $\frac{\Delta q}{\Delta t} = I$, waaruit volgt: $U \cdot I = \frac{\Delta W}{\Delta q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

Het **elektrisch vermogen** (van de bron) in een elektrische stroomkring met op een bepaald moment een stroomsterkte I en spanning U is:

$$P_e = U \cdot I$$

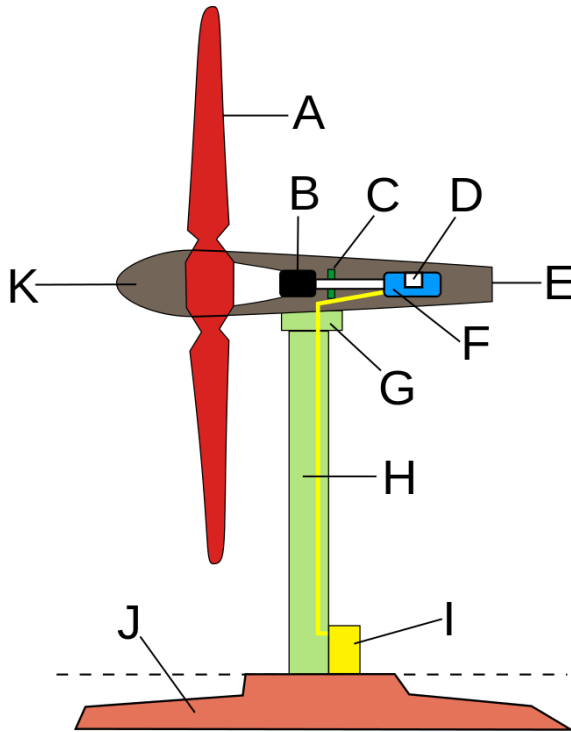
Voor het vermogen in een stroomkring heb je geen aparte sensor nodig als je al de spanning en stroom meet.

Je kan dit in de software laten berekenen met bovenstaande formules en deze dan grafisch voorstellen.

² In geval van constante gelijkstroom. Bij niet-constante gelijkstroom en wisselstroom is de afleiding van de formule iets ingewikkelder maar gelijkaardig in eindresultaat.

3. DE WINDTURBINE

A. Hoe werkt een windturbine ?



<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=12774184>

De wind waait tegen de wieken (A) van een windturbine.

De wieken beginnen te draaien.

Deze rotatie wordt in een tandwielkast (B) gebracht naar geschikt toerental.

In de dynamo of generator (F) wordt de mechanische energie van de rotatie omgezet in elektrische energie.

Andere onderdelen zijn:

C : rem op de as (om de rotatie te stoppen bij stormweer of tijdens onderhoud)

D : elektrische regulator (om bvb. pieken uit te vlakken en de opgewekte stroom te optimaliseren met een variabele weerstand)

E : gondel (behuizing)

G : orientatiemotor (om de wieken recht op de windrichting te plaatsen)

H : mast

I : cabine (voor aansluiting op elektriciteitsnet)

J : fundering

K : naaf

B. Hoe werkt een dynamo ?



De draaibeweging in een windturbine laat in de stroomgenerator (dynamo) een spoel van koperdraad in een magnetisch veld ronddraaien.

Deze beweging in het magnetisch veld zal elektronen van de koperatomen losmaken van hun baan rond de atoomkern en hen doen bewegen. Zo ontstaat er elektrische stroom in de koperdraad.

In 1869 vond de Belgische uitvinder Zénobe Gramme (1826-1901), een autodidact en timmerman uit Luik, de naar hem genoemde Gramme-dynamo uit.

Deze generator bestaat uit een vast gedeelte, de stator en een draaiend gedeelte, het anker.

De stator is de permanente magneet van de dynamo. Het anker is een weekijzeren lichaam waarrond een dertigtal spoelen van koperdraad zijn gewikkeld.

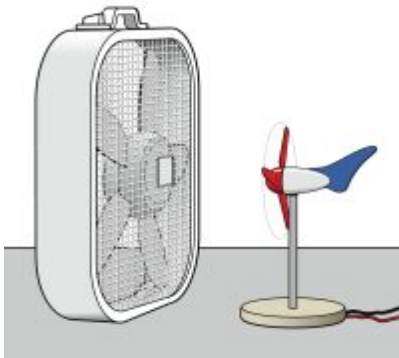
Het anker draait rond in het door de stator opgewekte magnetisch veld. Het is in de koperen spoelen van het anker dat het magnetisch veld van de stator elektriciteit opwekt.

De Gramme-dynamo was een van de eerste commercieel bruikbare generatoren van elektriciteit.



<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3230159>

C. Hoe meet je de opgewekte energie van een windturbine ?



Om kennis te maken met windenergie, kan je een Vernier mini-windturbine voor een ventilator op ongeveer 15 cm plaatsen en er een Vernier “Sound and Light Board” op aansluiten.

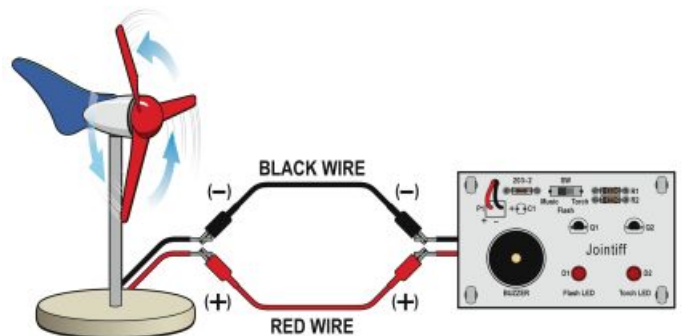


De Vernier “Sound and Light Board” is een bordje met enkele elektrische applicaties zoals LED lichtjes en een muziekdootje.

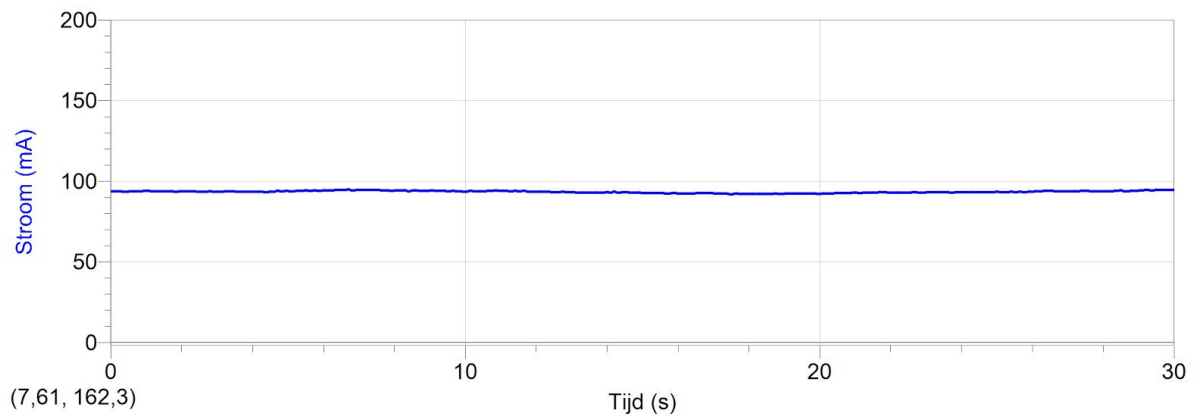
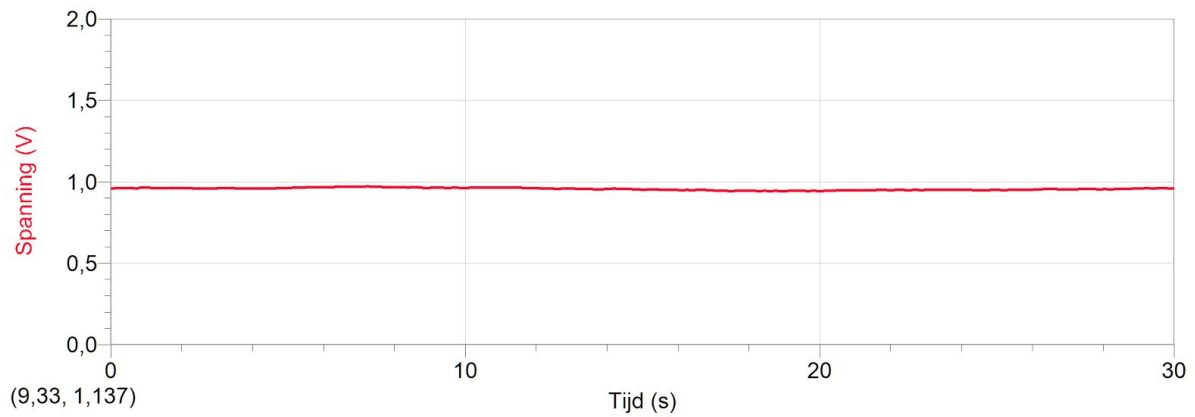
Door de wind van de ventilator gaan de wieken van de turbine draaien.

De hierdoor opgewekte elektrische energie zal een lampje doen branden of een muziekje doen afspelen.

De door de windturbine opgewekte elektronenstroom verricht arbeid door licht of geluid te produceren.



Wanneer je in dit stroomkring een stroom- en spanningssensor plaatst en gedurende enkele seconden de metingen uitvoert en grafisch voorstelt, bekom je volgende grafieken:

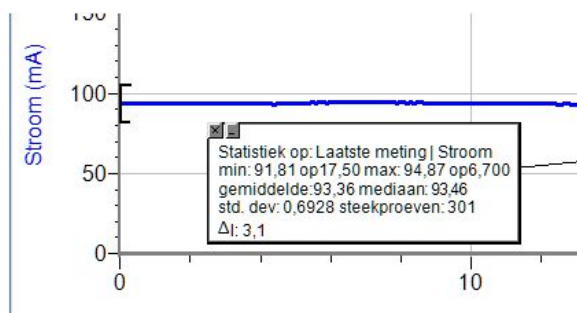


De grafieken van de elektrische spanning en stroom geproduceerd door de windturbine zijn “bijna” horizontaal met af en toe een kleine afwijking.

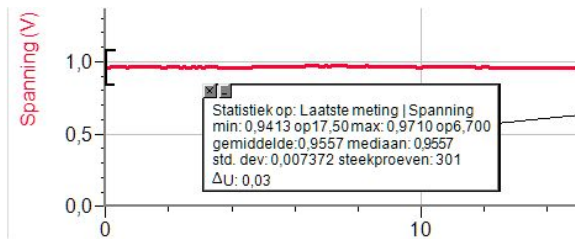
Deze fluctuaties van de gelijkstroom kunnen verklaard worden door bijvoorbeeld asymmetrieën in de rotor- of ventilatorwieken of in de magnetische spoel van de stroomgenerator, of door andere verstoringen. De kleine op- en neergaande waarden zijn eerder een vorm van **ruis**.

Om deze ruis uit te vlakken kan je twee **statistische analyses** uitvoeren.

Je kan het **gemiddelde** van alle metingen berekenen.

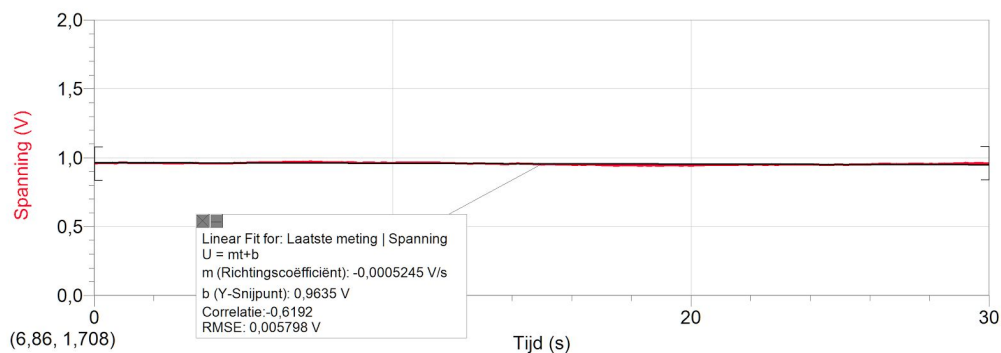
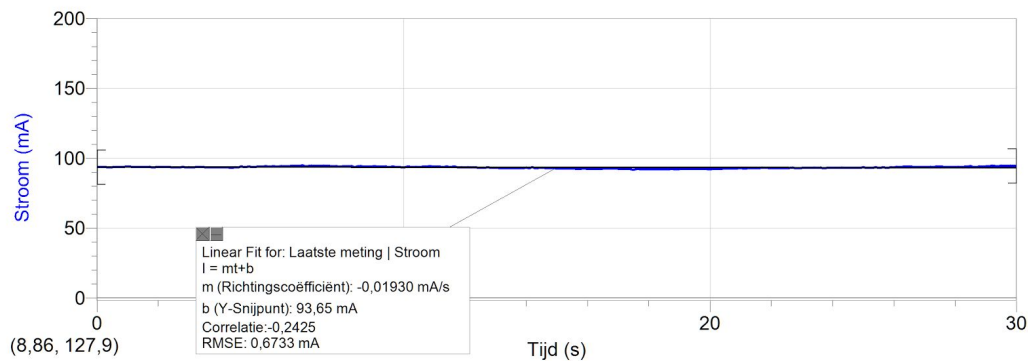


De gemiddelde opgewekte stroom I is hier 93.36 mA.



De gemiddelde opgewekte spanning U is hier 95.57 V.

Als we de grafiek voorstellen zonder de punten te verbinden, dus als **puntenwolken** en als we op die puntenwolken **lineaire regressie** toepassen, dan bekomen we :

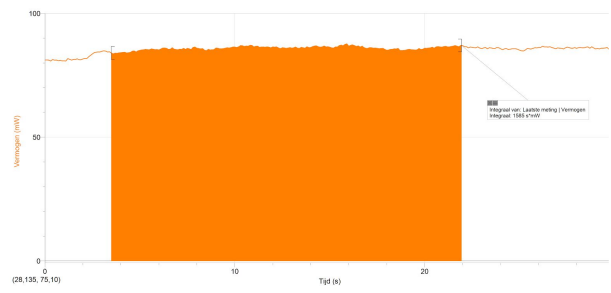


Telkens zijn dit eerstegraadsfuncties met een richtingscoëfficiënt die “bijna” nul is. De stroom en de spanning in de stroomkring zijn “bijna” constant.

Het vermogen in de stroomkring bekom je door de stroom en de spanning te vermenigvuldigen.

Als het vermogen gedurende een zeker tijdsinterval $[t_1, t_2]$ gemeten werd, kan de totale gegenereerde energie / geleverde arbeid berekend worden met een bepaalde integraal :

$$W = E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) . dt$$



D. Wet van Betz : het maximaal vermogen van een windturbine.

De Duitse natuurkundige Albert Betz (1886-1968) publiceerde in 1919 een berekening voor het theoretische maximale vermogen van een windturbine, onafhankelijk van haar design.

De wet van Betz luidt :

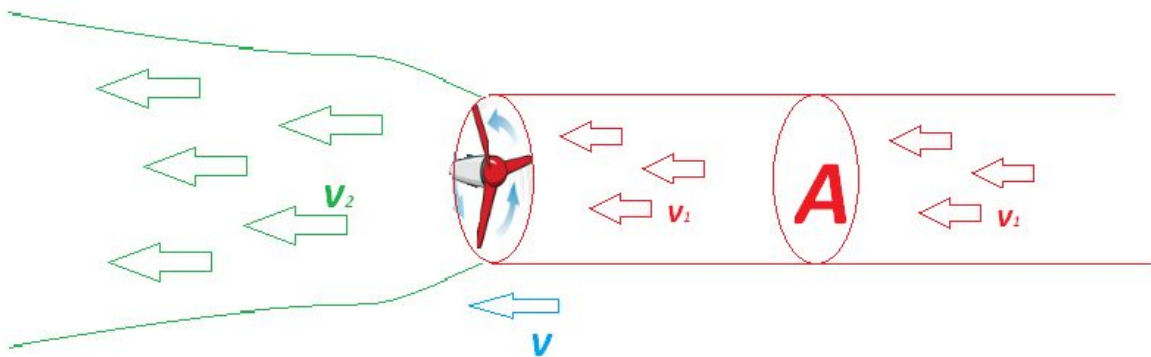
Geen enkele windturbine kan meer dan 16/27 (59.3%)

van de kinetische energie van de wind omzetten in energie.

We geven hier een bewijs van deze wet.

De wind waait met een constante snelheid v_1 tot tegen de rotorschijf met oppervlakte A van een windturbine. Kinetische energie van de wind wordt getransformeerd zodat de windsnelheid daalt. De wind stroomt door die rotorschijf met snelheid v . Nadien stroomt de wind verder achter de rotorschijf met snelheid v_2 .

Schematisch kan dit voorgesteld worden door :



Beschouwen we de het luchtvolume dat gedurende 1 tijdseenheid (1 seconde) door de rotorschijf gaat. Het volume hiervan is een cilinder met grondvlak A en hoogte v .

De massa van dit luchtvolume stellen we voor door $\overline{m}$.

Als ρ de dichtheid is van de lucht, dan is $\overline{m} = \rho A v$.

Dit luchtvolume met massa $\overline{m}$ kunnen we ook beschouwen tijdens de tijdseenheden voor de rotordoorgang en na de rotordoorgang.

De kinetische energie die tijdens een tijdseenheid door de rotorschijf van de windturbine wordt omgezet in elektrische energie is:

- enerzijds het verschil tussen de kinetische energie van de windmassa's voor en na de rotordoorgang:

$$\overline{E} = \frac{1}{2} \overline{m} (v_1)^2 - \frac{1}{2} \overline{m} (v_2)^2$$

$$\overline{E} = \frac{1}{2} \rho A v (v_1^2 - v_2^2)$$

- anderzijds gedefinieerd als het vermogen P van de windturbine

$$\text{Dus is } P = \frac{1}{2} \rho A v (v_1^2 - v_2^2) *$$

Dit vermogen kunnen we ook op een andere manier berekenen want de algemene formule voor het kinetisch vermogen is:

$$P = F v = m \cdot v \cdot a$$

In het beschouwde interval van 1 tijdseenheid is de massa $\overline{m} = \rho A v$ en de versnelling $a = v_1 - v_2$

Het vermogen kan dus ook geschreven worden als :

$$P = \rho A v^2 (v_1 - v_2) **$$

De gelijkstelling van uitdrukkingen * en ** geeft :

$$\frac{1}{2} \rho A v (v_1^2 - v_2^2) = \rho A v^2 (v_1 - v_2)$$

$$\frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) = v (v_1 - v_2)$$

Waaruit volgt : $v = \frac{1}{2} (v_1 + v_2)$ De snelheid van de wind doorheen de rotorschijf is het gemiddelde van de windsnelheden voor en achter de rotorschijf.

Zodoende kunnen we de kinetische energie die tijdens één tijdseenheid door de rotorschijf van de windturbine wordt omgezet in elektrische energie is, herschrijven als :

$$\overline{E} = \frac{1}{2} \rho A v (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} \rho A \frac{1}{2} (v_1 + v_2) (v_1^2 - v_2^2)$$

$$\overline{E} = \frac{1}{4} \rho A (v_1^3 + v_2 v_1^2 - v_1 v_2^2 - v_2^3)$$

Stellen we $v_2 = \alpha v_1$, dan is $0 < \alpha < 1$ en hangt α af van het design van de rotor van de windturbine.

Zodoende kunnen we de opgewekte elektrische energie schrijven als een functie van α :

$$\overline{E} = \frac{1}{4} \rho A v_1^3 (1 + \alpha - \alpha^2 - \alpha^3)$$

De vraag is voor welk windturbine-design deze geproduceerde elektrische energie maximaal is.

Wiskundig komt dit neer op een minimax-probleem van een derdegraads veeltermfunctie.

We differentiëren $\bar{E}$ naar α :

$$\frac{d\bar{E}}{d\alpha} = \frac{1}{4} \rho A v_1^3 (1 - 2\alpha - 3\alpha^2) = \frac{1}{4} \rho A v_1^3 (-3\alpha + 1)(\alpha + 1)$$

Tekenonderzoek van deze afgeleide toont aan dat de maximale energieproductie bereikt wordt door een design met $\alpha = \frac{1}{3}$

α		-1		0		1/3	
$\frac{d\bar{E}}{d\alpha}$	- - -	0	+ + + + + + +			0	- - -
$\bar{E}$	////////////////			↗↗↗↗		MAX	↘↘↘↘

De getalwaarde van veelterm $\bar{E}$ voor $\alpha = \frac{1}{3}$ geeft de maximaal produceerbare elektrische energie uit de windturbine gedurende 1 tijdseenheid:

$$\bar{E}_{max} = \frac{8}{27} \rho A v_1^3$$

Dit resultaat vergelijken we met de hypothetische (maar praktisch onmogelijke !) situatie waarbij alle kinetische energie van de wind wordt omgezet in elektrische energie. De hypothetische kinetische totaalenergie van de luchtmasa $\rho A v_1$ die gedurende 1 tijdseenheid met snelheid v_1 voortstuwt is :

$$\bar{E}_{hyp} = \frac{1}{2} \rho A v_1^3$$

De verhouding van deze twee energiewaarden wordt de maximale prestatie-coëfficiënt van een windturbine genoemd, of de constante van Betz:

$$C_p = \frac{\bar{E}_{max}}{\bar{E}_{hyp}} = \frac{16}{27} = 0,596...$$

4. ZELF EEN WINDTURBINE BOUWEN

A. Hoe maak je de wieken ?

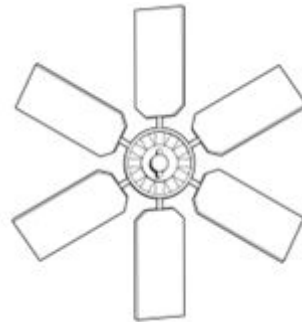
Ingenieurs die een windturbine ontwerpen, besteden zeer veel aandacht aan de design van de wieken.

De rotor met de wieken vormt het belangrijkste onderdeel van een windturbine.

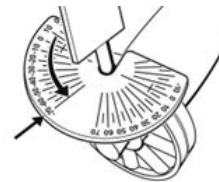
Wieken vangen de wind op en gaan hierdoor draaien. Zo drijven wieken een generator aan om elektriciteit te produceren. Als de wieken de energie van de wind niet goed omzetten in een draaiende beweging, wordt er niet voldoende elektriciteit geproduceerd. Ingenieurs willen wieken ontwerpen die zo efficiënt mogelijk wind opvangen en die ook zo stevig, geruisloos, licht en goedkoop mogelijk zijn.

In plaats van het bij de Vernier mini-windturbine meegeleverde rode wiekensetje, kan je ook zelf wieken ontwerpen.

Hiertoe knip je kartonnen of balsa-houten rechthoekige bladen in de gewenste vorm en lijm je er pennetjes op. Hiermee monteer je de wieken op een naaf.



Voor een goede, gelijkmatige draaiing moeten alle wieken onder eenzelfde hoek staan ten opzichte van het draaivlak. Dit meet je na met een speciale gradenboog.



Het is ook mogelijk om een wiekenset te ontwerpen met 3D-software en te maken met een 3D-printer.

B. Wat is de invloed van de invalshoek van de wieken op het vermogen ?

De wieken van een windturbine draaien omdat de wind ertegen blaast.

Draaiing is enkel mogelijk als de wieken onder een zekere invalshoek staan ten opzicht van het draaivlak.

We gaan nu onderzoeken welke invalshoek het grootste vermogen geeft.

We doen dit op een turbine met twee wieken en met verschillende invalshoeken.

Noteer het resultaat van je metingen:

Invalshoek van de wieken	Vermogen (mW)
- 50°	
- 40°	
- 30°	
- 20°	
- 10°	
- 5°	

Importeer deze resultaten in de tabel van een wiskundig softwareprogramma en beantwoord volgende vragen:

- Bij welke invalshoek van de wieken is het vermogen het hoogst ?
- Kan je met regressie-analyse een goed wiskundig model vinden voor het verband tussen invalshoek en geproduceerd vermogen ?

Extra : onderzoek of bij een andere windsnelheid ook de invalshoek met hoogste vermogen verandert.

C. Wat is de invloed van de grootte van de wieken op het vermogen?

De wieken van een windturbine vangen de wind op om rond te draaien en zo elektriciteit op te wekken in de generator. Betekent dit dat grotere wieken meer elektriciteit zullen produceren en kleinere wieken minder?

Om dit te onderzoeken maak je een rotor met twee rechthoekige wieken en kies je een vaste invalshoek.

Meet de lengte en breedte van de wieken en bereken de oppervlakte van een wiek.

Stap voor stap ga je het vermogen meten en telkens de wieken met 1 cm inkorten.
Noteer de bekomen waarden in de tabel.

Lengte L van een wiek (cm)	Oppervlakte S van een wiek (cm ²)	Vermogen P van de turbine (mW)

Importeer deze resultaten in de tabel van een wiskundig softwareprogramma en beantwoord volgende vragen:

- Bij welke wiekgrootte is het vermogen het hoogst ?
- Kan je met regressie-analyse een goed wiskundig model vinden voor het verband tussen wiekgrootte en geproduceerd vermogen ?

Extra : onderzoek of de windsnelheid of de invalshoek van de wieken een invloed hebben op het regressie-model tussen wiekoppervlakte en vermogen.

D. Wat is de invloed van het aantal wieken op het vermogen ?

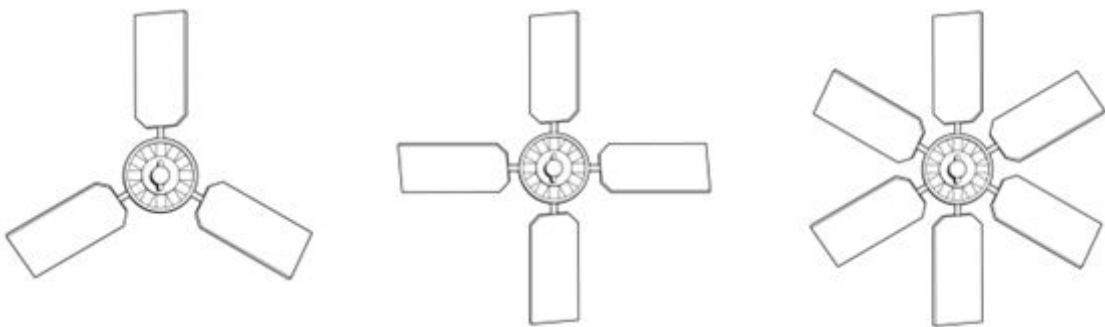
Niet alle windturbines of ventilatoren hebben evenveel wieken. Je ziet er met veel en met weinig wieken.

Zullen windturbines met meer wieken meer elektriciteit produceren en die met minder wieken minder ?

Om dit te onderzoeken maken we 6 gelijkvormige wieken met 6 kartonnen rechthoekige bladen van ongeveer 6 x 20 cm. Zorg dat de houten pennetjes alle op dezelfde manier op de bladen gelijmd zijn.

Opdracht:

Monteer achtereenvolgens 2, 3, 4 en 6 wieken op de naaf. Let op dat je de steeds alle wieken onder eenzelfde invalshoek monteert.



Meet voor elke set met een zeker aantal wieken het vermogen en noteer dit in een tabel.

Aantal wieken n	Vermogen P (mW)
2	
3	
4	
6	

Beantwoord volgende vragen:

- Bij welk aantal wieken is het vermogen het hoogst ?
- Wordt deze observatie bevestigd bij andere windsnelheid of bij een andere invalshoek ?

E. Wat is de invloed van de windsnelheid op het vermogen ?

De in de praktijk zeer belangrijke parameter windsnelheid kan je simuleren door de ventilator sterker of zwakker te laten draaien of door de afstand tot de windturbine te veranderen.

De windsnelheid kan je meten met een anemometer. Je monteert die voor de ventilator.

Voer metingen uit en stel hiervan een tabel op :

Windsnelheid (m/s)	Spanning U (V)	Stroom I (mA)	Vermogen P (mW)

Importeer deze resultaten in de tabel van een wiskundig softwareprogramma en beantwoord volgende vragen:

- Kan je met regressie-analyse een goed wiskundig model vinden voor het verband tussen windsnelheid en geproduceerd vermogen ?
- Is er een verschil als je een rotor neemt met een andere design ?

F. Turbines met variabele weerstand

In de elektrische regulator van een windturbine kan het vermogen beïnvloed en geoptimaliseerd worden door het verhogen of verlagen van de weerstand in de stroomkring.

Onderzoeken we de invloed hiervan.

Herhaal nogmaals de metingen, ditmaal met een vaste windsnelheid, maar met een variabele weerstand in de stroomkring. Vervolledig de tabel.

Weerstand R (Ω)	Spanning U (V)	Stroom I (mA)	Vermogen P (mW)
10			
15			
20			
30			
40			
50			
100			

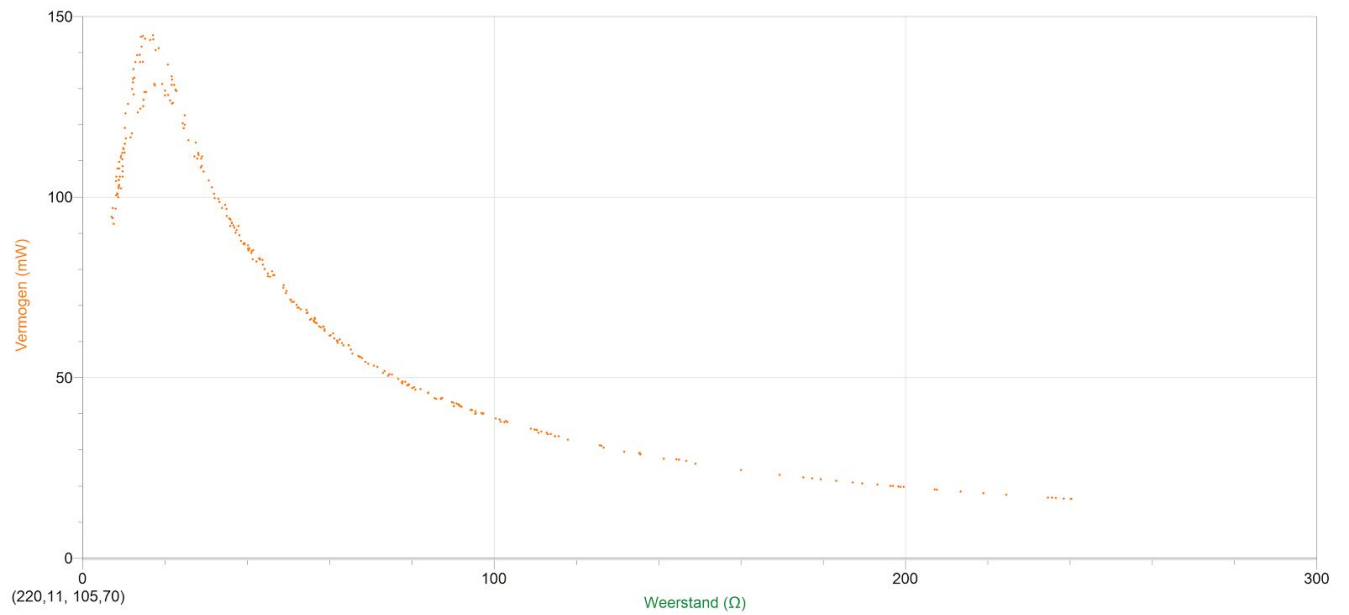
Importeer deze resultaten in de tabel van een wiskundig softwareprogramma en beantwoord volgende vragen:

- Bij welke weerstand is het vermogen het hoogst ?
- Kan je met regressie-analyse een goed wiskundig model vinden voor het verband tussen weerstand en geproduceerd vermogen ?

Extra 1 : onderzoek of bij een andere windsnelheid of bij een andere invalshoek ook de weerstand met hoogste vermogen verandert.

Extra 2 : In het softwareprogramma kan je de meting van het vermogen uitvoeren met een variërende weerstand.

Van deze meting kan je onmiddellijk de grafiek genereren en het maximum grafisch bepalen, eventueel met een regressiemodel.



Bijlagen

BRONNEN

- <https://onderwijs.vlaanderen.be/nl/stem>
- <http://www.stemalliance.eu/>
- <http://www.kidwind.org>
- <https://nl.wikipedia.org/>
- <https://en.wikipedia.org/>
- <http://www.vernier.com/products/kidwind/>

MATERIAAL

Vernier stelt twee types windturbines ter beschikking voor educatief gebruik.

De KidWind Mini Turbine heeft :

- een hoogte van 30,5 cm
- een rotordiameter van max. 40,6 cm
- een output van 0 tot 1 watt



De KidWind Basic Wind Turbine heeft:

- een hoogte van 61 cm
- een rotordiameter van max. 91,4 cm
- een output van 0 tot 1 watt
- een rotor met een set tandraden



Mogelijke meetopstellingen met materiaal van Vernier en Texas Instruments:

Meeteenheid	Software	Interface	Sensor(en)
TI-Nspire rekentoestel		TI-Nspire Lab Cradle	Elektrische spanningssensor Elektrische stroomsensor
Computer	TI-Nspire		
	Logger Pro	Labquest Mini	Vernier Energie-sensor
Labquest Interface			
Laptop (win of mac)	Logger Pro	Labquest Mini	
		Labquest Stream (draadloos)	
Ipad	Graphical Analysis App		
Android tablet			
Chromebook		Vernier Go Direct™ Constant Current System Vernier Go Direct™ Voltage Probe	

Bijkomend materiaal:

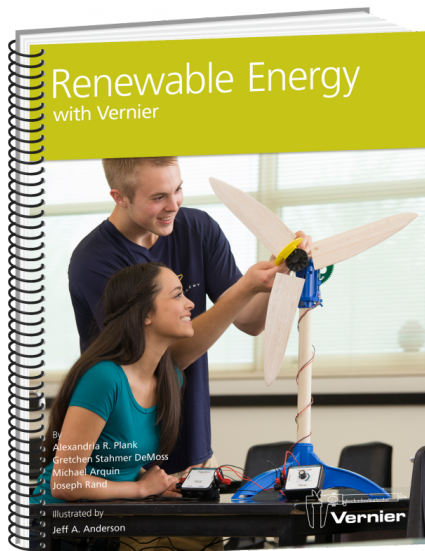
De Vernier “Sound and Light Board” is een bordje met enkele elektrische applicaties zoals LED lichtjes en een muziekdoosje.



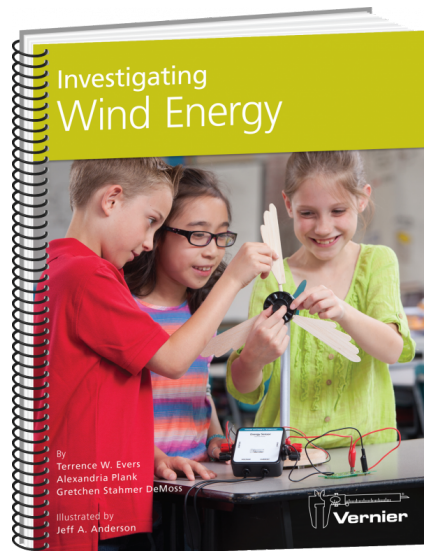
Met de Vernier Resistor Board of de Vernier Variable Load kan je extra weerstand aan een elektrische stroomkring toevoegen.



BOEKEN



The “Renewable Energy with Vernier” lab book features 26 experiments in wind and solar energy. The lab book contains a combination of explorations, traditional experiments, inquiry investigations, engineering projects, and more.



The “Investigating Wind Energy” lab book contains 10 hands-on, engaging wind energy experiments for elementary students and a culminating wind energy engineering project.

DANKBETUIGING

Deze tekst werd nauwgezet en deskundig nagelezen door volgende personen. Hierbij dank ik hen voor de vele waardevolle suggesties.

- dhr. Karel Vlieghe, ere-inspecteur wiskunde en wetenschappen, Vlaamse Overheid
- dhr. Ivo Janssens, leraar fysica en wiskunde aan dé Kunsthumaniora, Antwerpen
- dr. Jacques Vanderhaeghen, docent fysica VIVES Hogeschool Brugge-Oostende

CONTACT AUTEUR

- Jan Vermeeylen
- jan@rhombus.be
- <https://be.linkedin.com/in/jan-vermeeylen-a412b739>