



Wanneer cilinders elkaar ontmoeten

Michel Roelens

UC Leuven-Limburg Lerarenopleiding
Maria-Boodschaplyceum Brussel
Redactie **UITWISKELING** (al geabonneerd?)

Wanneer cilinders elkaar ontmoeten

1. De schouw van mijn collega Kristof



2. De Methode van onze collega Archimedes



3. Het lichaam van onze collega 牟合方蓋



Eerste deel

...

De schouw van mijn collega

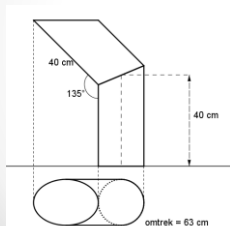
De schouw van mijn collega



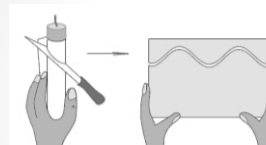
Zijn schouwpijp bedekken: twee cilinders die een hoek vormen van 135° .

De schouw van mijn collega

Dit zijn de gegevens



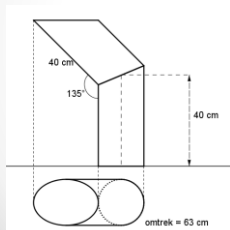
Ontwikkeling van een vlakke doorsnede van een cilinder



Een sinusoidale!



De schouw van mijn collega



$$y = a \cos bx + d$$

$$d = 40$$

$$b = \frac{2\pi}{63}$$

$$a =$$

De schouw van mijn collega

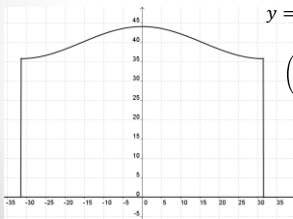


$$a = \frac{63}{2\pi} \tan 22,5^\circ$$

straal

De schouw van mijn collega

Ik heb de cilinder opgesneden in het laagste punt van zijn cilindersnede.



$$y = \frac{63}{2\pi} \tan 22,5^\circ \cos \frac{2\pi x}{63} + 40$$

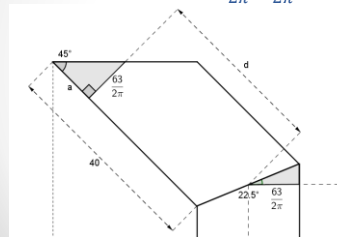
$$\left(-\frac{63}{2} \leq x \leq \frac{63}{2} \text{ in centimeter} \right).$$



Voor de wortelvirtuozen:
 $\tan 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$

De schouw van mijn collega

$$d = 40 - \frac{63}{2\pi} + \frac{63}{2\pi} \tan 22,5^\circ.$$

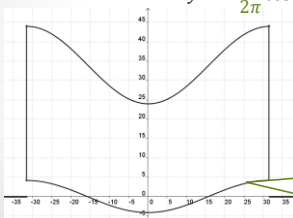


De schouw van mijn collega

Het bovenste stuk:

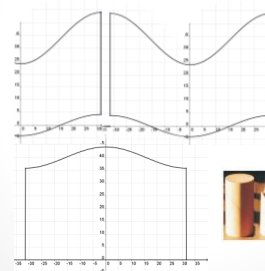
$$y = -\frac{63}{2\pi} \cos \frac{2\pi x}{63} + 40 - \frac{63}{2\pi} + \frac{63}{2\pi} \tan 22,5^\circ$$

$$\left(-\frac{63}{2} \leq x \leq \frac{63}{2} \right).$$



Het tegengestelde van daarjuist, zonder de constante term

De schouw van mijn collega



De schouw van mijn collega



Maar...

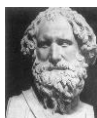
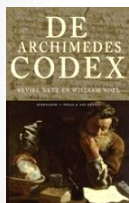


Tweede deel

Onze collega Archimedes

De Methode

(Περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἑρατοσθένη ἔφοδος)



Brief aan Eratosthenes in Codex C

- ontdekt in 1906 (palimpsest)
- Bestudeerd door Heiberg
- gestolen
- verkocht in 1998 aan Mister B voor \$ 2 200 000

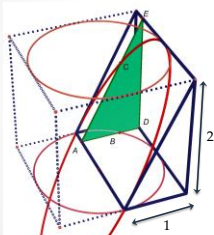


De Methode

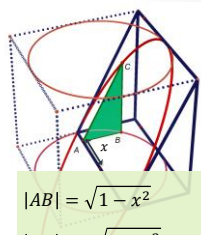
(Περὶ μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἑρατοσθένη ἔφοδος)



Volume van een cilindersegment



$$A(ADE) = 1$$

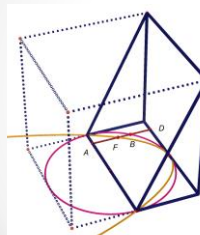


$$|AB| = \sqrt{1 - x^2}$$

$$|BC| = 2\sqrt{1 - x^2}$$

$$A(ABC) = 1 - x^2$$

Volume van een cilindersegment



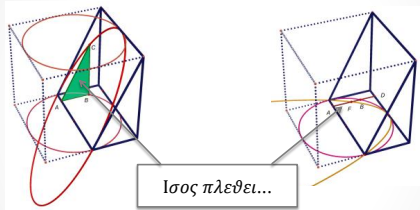
$$\frac{A(ABC)}{A(ADE)} = \frac{1 - x^2}{1} = \frac{|AF|}{|AD|}$$

$$\Rightarrow \frac{V(\text{cilindersegment})}{V(\text{prisma})}$$

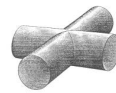
$$= \frac{A(\text{paraboolsegment})}{A(\text{rechthoek})} = \frac{2}{3}$$

Resultaat uit "De kwadratuur van de parabool"

Volume van een cilindersegment



Integralen avant-la-lettre? Kardinaalgetallen avant-la-lettre?



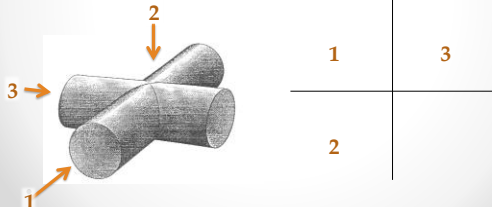
Derde deel

De doorsnede van twee cilinders

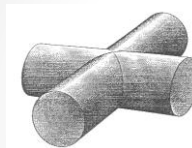
Doorsnede van twee cilinders

De doorsnede van twee cilinders met gelijke stralen en waarvan de assen elkaar loodrecht snijden

- Welke vorm hebben de 'ribben'?
- Teken de loodrechte projecties



Doorsnede van twee cilinders



Ribben?

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ (x - y)(x + y) = 0 \end{cases}$$

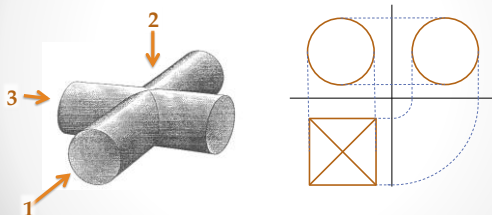
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ x - y = 0 \vee x + y = 0 \end{cases}$$

Of meteen, vanwege de symmetrie

Twee ellipsen; verhouding van de assen: $\sqrt{2}$
(excentriciteit: $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

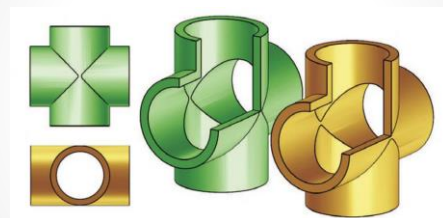
Doorsnede van twee cilinders

Loodrechte projecties

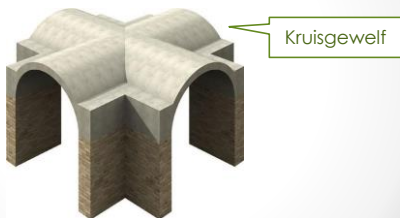


It takes an unusual gift of imagination to visualize this shape clearly. (Strogatz)

Doorsnede van twee cilinders



Doorsnede van twee cilinders



Doorsnede van twee cilinders



Bicilinder; lichaam van Steinmetz; equidomoïde; vogelkooi

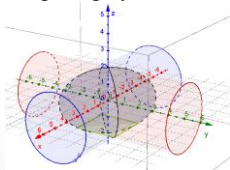


C.P. Steinmetz
1865-1923

Volume van de bicilinder

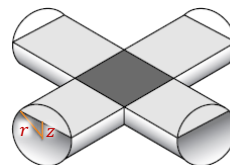
Bereken het volume (in functie van de straal r).

- Welke 'sneetjes' hebben de meest toegankelijke vorm?
- Na de berekening: vergelijk met andere volumes



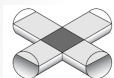
Volume van de bicilinder

De 'horizontale' sneetjes zijn vierkanten!



De zijde van het vierkant op hoogte z is: $2\sqrt{r^2 - z^2}$.

Volume van de bicilinder



$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-r}^r (2\sqrt{r^2 - z^2})^2 dz \\
 &= 4 \int_{-r}^r (r^2 - z^2) dz \\
 &= 4 \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-r}^r \\
 &= 4 \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) \\
 &= \frac{16r^3}{3} \approx 5,33 r^3
 \end{aligned}$$

Geen π !

Volume van de bicilinder

Vergelijk:

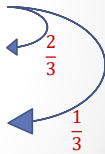
- Omgесhr. kubus: $V = \frac{24}{3} r^3 = 8r^3$
- Bicilinder: $V = \frac{16}{3} r^3 \approx 5,33 r^3$
- Ingeschr. bol: $V = \frac{4\pi}{3} r^3 \approx 4,19 r^3$
- Ingeschr. octaëder: $V = \frac{8}{3} r^3 \approx 2,67 r^3$

Gemiddelde

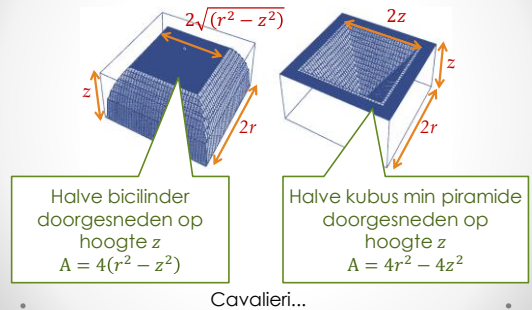
Volume du bicylindre

Vergelijk:

- Omgeschr. kubus: $V = \frac{24}{3} r^3 = 8r^3$
- Bicilinder: $V = \frac{16}{3} r^3 \approx 5,33 r^3$
- Ingeschr. bol: $V = \frac{4\pi}{3} r^3 \approx 4,19 r^3$
- Ingeschr. octaëder: $V = \frac{8}{3} r^3 \approx 2,67 r^3$



Volume van de bicilinder



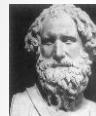
Volume van de bicilinder



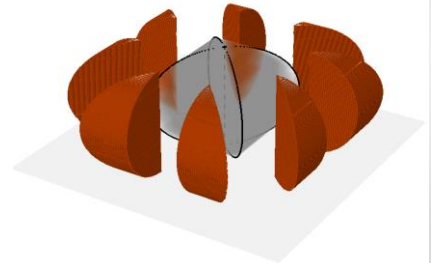
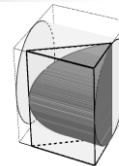
祖冲之 Zu Chongzhi
5de eeuw

牟合方盖 (Móuhéfāng gài,
letterlijk: dubbel deksel)

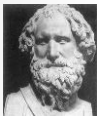
Volume van de bicilinder



Archimède



Volume van de bicilinder



Archimède

$\frac{2}{3}$ van de kubus: Archimedes vermeldt dit in zijn voorwoord op *De Methode*.

Zijn bewijs is verloren gegaan.

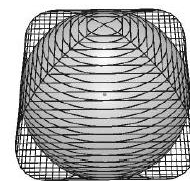
Archimedes merkt op:

In tegenstelling tot bollen, kegels en cilinders, is dit lichaam 'gelijk' aan een veelvlak.

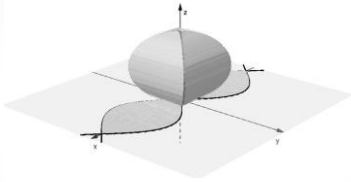
Volume van de bicilinder

刘徽 (Liú Huī, 3de eeuw n.C.), 九章算术 (Jiǔzhāng Suànrshù:
Negen hoofdstukken van de wiskunst, 2de eeuw v.C.)

bicilinder
→ bol



Oppervlakte van de bicilinder

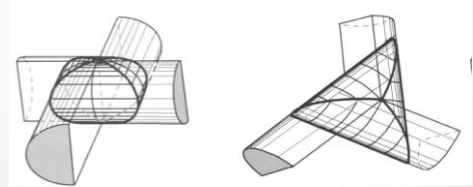


$$A(\text{bicilinder}) = \frac{2}{3} A(\text{kubus}) \quad \text{kwadratuur}$$

$$V(\text{bicilinder}) = \frac{2}{3} V(\text{kubus}) \quad \text{kubatuur}$$

Doorsnede van verschillende horizontale cilinders

"Oneven" veralgemening



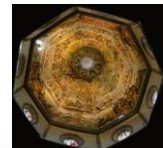
Doorsnede van verschillende horizontale cilinders

"De koepel van de kathedraal van Firenze is een halve vijfhoekige equidomoïde."
(www.mathcurve.com)



Uiteraard is alles wat op internet te vinden is, waar!

Doorsnede van verschillende horizontale cilinders



In de klas?

- Minder routineuze oefening op
$$y = a \sin(b(x - c)) + d$$
- Minder routineuze oefening op volumeberekening met integralen
- Verschillende manieren om een zelfde volume te vinden (met en zonder integralen)
- Combinatie van analyse en ruimtemeetkunde
- **Wiskundig object met een 'geschiedenis'**

Waar vind je de tekst van deze presentatie?

- Deel 1: Roelens (2013). Ontmoeting van twee cilinders, *Uitwiskeling* 29/1, 9-12.
- Deel 2: Bespreking in *Uitwiskeling* 25/4 (2009), 59-65 van het boek Netz, W. Noel (2007). *De Archimedes-codex*.
- Deel 3: Roelens, M. (2015). De vogelkool van Archimedes Zu Chongzhi, Steinmetz en anderen, *Uitwiskeling* 31/1 (2015), 8-15

Bedankt!

Michel.Roelens@ucll.be
www.uitwiskeling.be

