

# History of mathematics in math education

Jeanine Daems  
Brussels, May 26<sup>th</sup> 2017

# Introduction: who am I?

Jeanine Daems

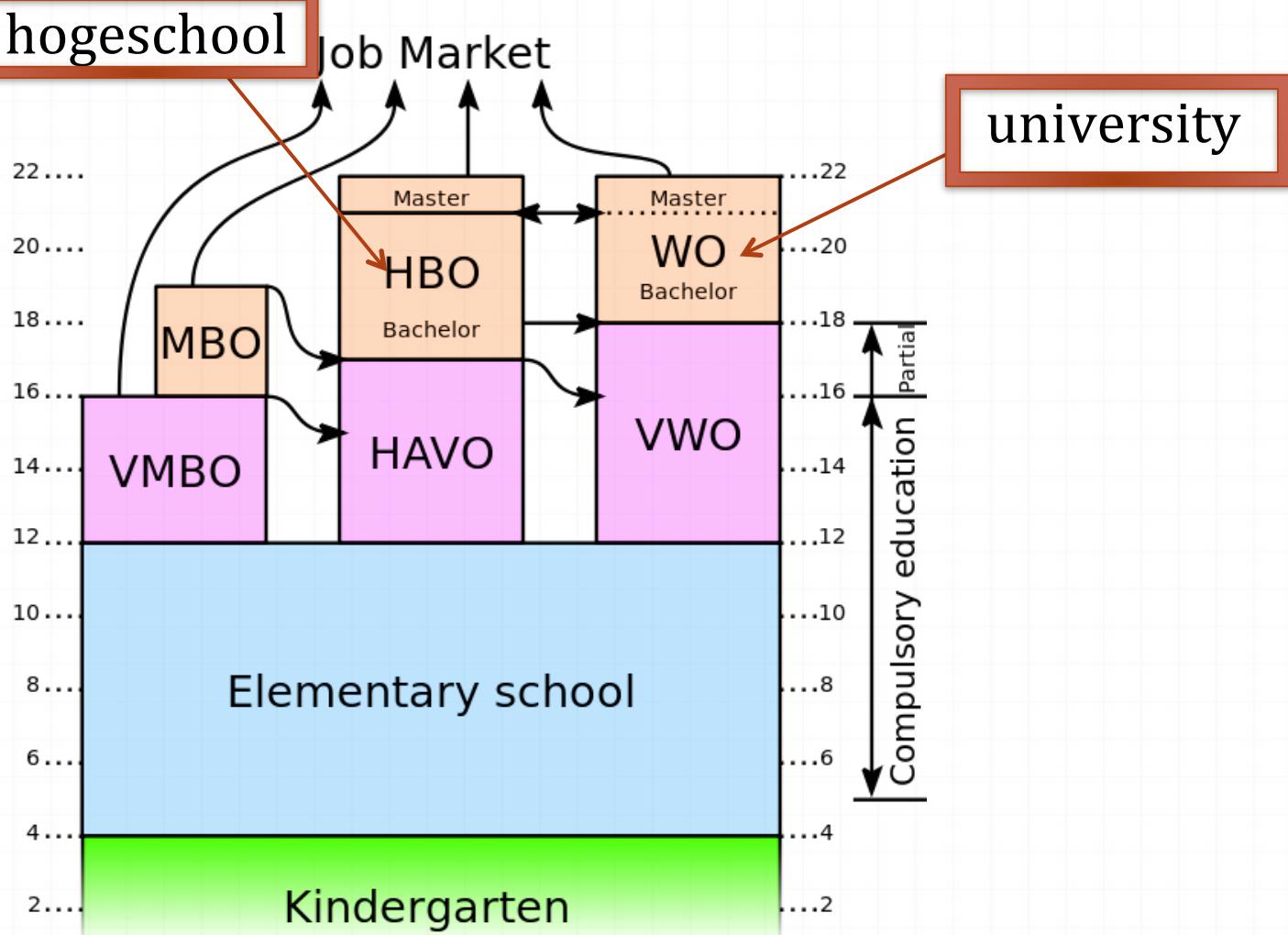
teacher trainer in mathematics  
at Hogeschool Utrecht

[jeanine.daems@hu.nl](mailto:jeanine.daems@hu.nl)  
twitter: @jeanine\_d

series of articles in *Euclides*  
with Desiree van den Bogaart  
(Hogeschool van Amsterdam)



# Dutch education system



# Teacher training

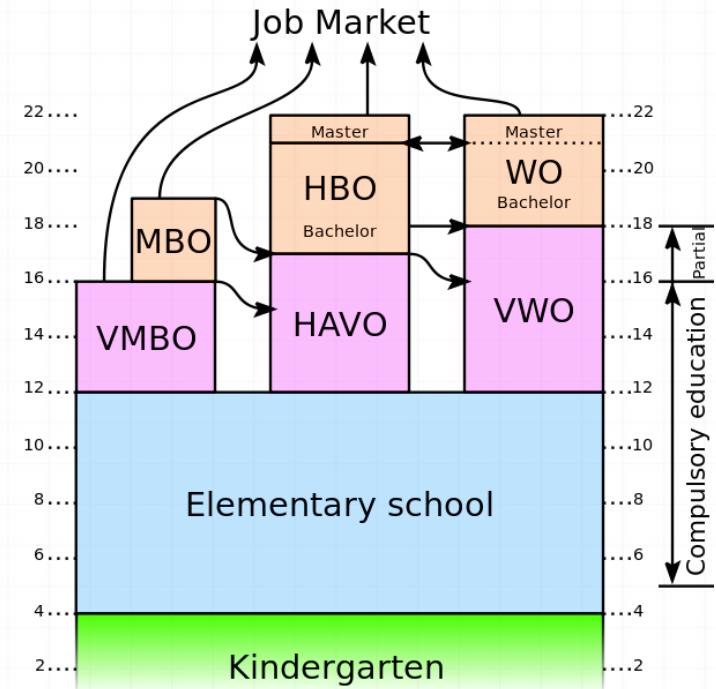
0 lower-secondary qualification:

0 hbo bachelor

0 full qualification:

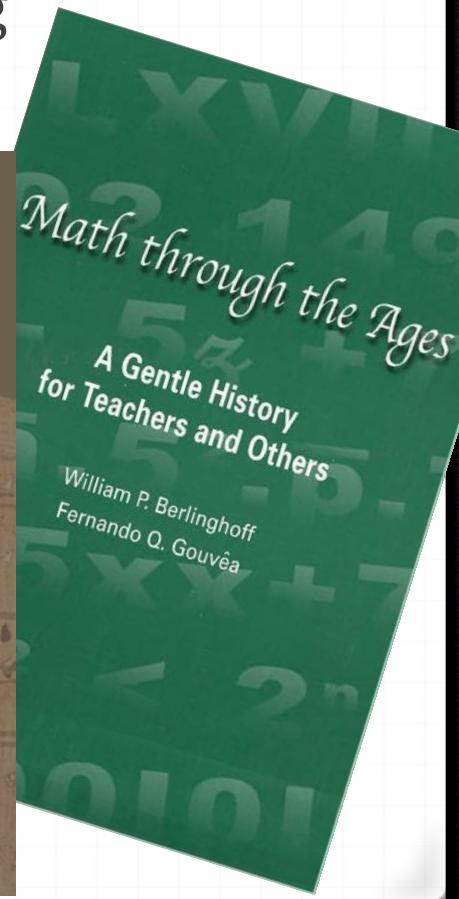
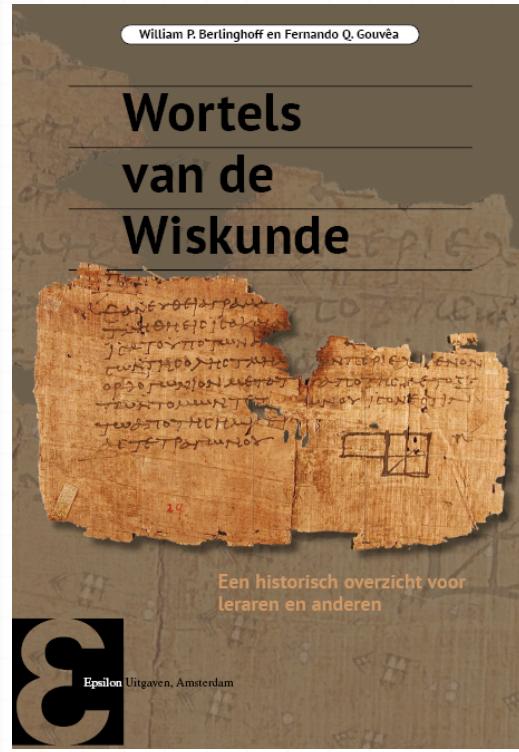
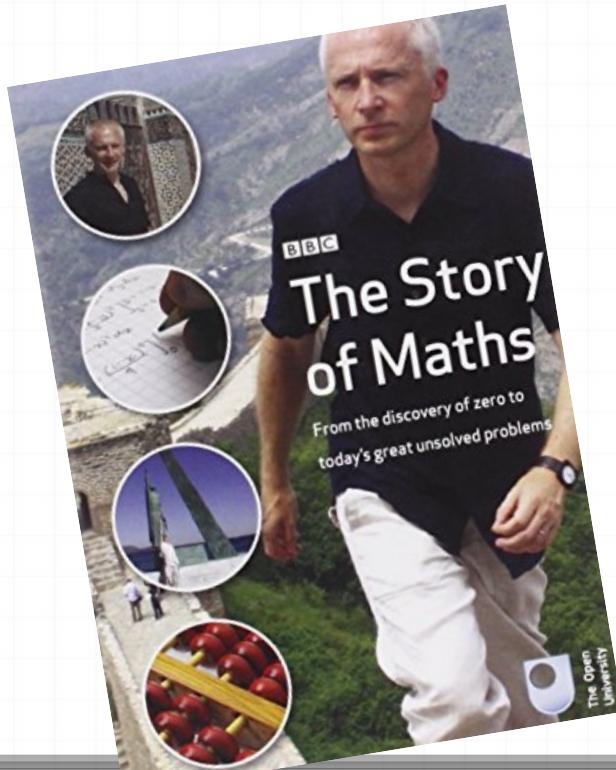
0 hbo bachelor + hbo master

0 university master  
(postgrad or during master)



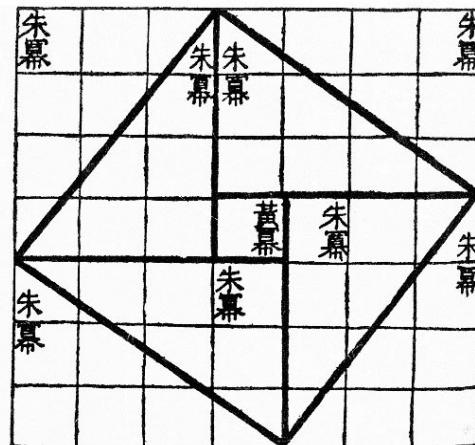
# History of mathematics in teacher training

3<sup>rd</sup>-year bachelor course, open book test,  
developing lessons for highschool students using  
history and primary source



# Flipping the classroom

read book and watch documentary as homework,  
worksheets on primary sources in class.



THIENDE  
HET ANDER DEEL <sup>13</sup>  
DER THIENDE VANDE  
WERCKINCHE.  
I. VOORSTEL VANDE  
VERGADERINGHE.  
Wesende ghegeven Thiendetalen te ver-  
gaderen: bare Somme te vinden.  
  
T' GEGHEVEN. Het sijn drie oirdens van  
Thiendatalen, welcker eerste 27<sup>(1)</sup> 8<sup>(1)</sup> 4<sup>(2)</sup>  
875<sup>(2)</sup> 7<sup>(1)</sup> 8<sup>(2)</sup> 2<sup>(3)</sup>, T BEGHEERDE. Wy  
moeten haer Somme vinden. WERCKING.  
Men tal de ghegeven ghe-  
talen in orden stellen als  
hier neven, die vergaderen-  
de naer de ghemeeene manie  
re der vergaderinghe van  
heeletallen aldus;  
Com in Somme (door het 1. probleme onfer  
Franscher Arith.) 941;04 dat sijn (welck de  
eckenen boven de ghetalen staende, anwijnen)  
941<sup>(1)</sup> 3<sup>(1)</sup> 0<sup>(2)</sup> 4<sup>(3)</sup>. Ick legghe de selvete wesen  
de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghege-  
ven 27<sup>(1)</sup> 8<sup>(1)</sup> 4<sup>(2)</sup> 7<sup>(3)</sup>, doen (door da 3e. hera-  
ling) 27<sup>(1)</sup> 8<sup>(1)</sup> 4<sup>(2)</sup> 7<sup>(3)</sup>, maeckē vslamen 27<sup>(1)</sup> 8<sup>(1)</sup> 4<sup>(2)</sup>  
Ende door de selve reden fullen de 37<sup>(1)</sup> 6<sup>(1)</sup> 7<sup>(2)</sup>  
5<sup>(3)</sup> weerdich sijn 37<sup>(1)</sup> 6<sup>(1)</sup> 7<sup>(2)</sup>  
8<sup>(3)</sup>

# Why focus on primary sources?

let's experience!

(also: example on how you can do this in class)

outline:

- 0 look at primary source
- 0 exchange findings
- 0 central discussion of findings
- 0 background info
- 0 how to ask questions using a source
- 0 conclusions on use of primary sources as a didactical tool

# Primary source

جدول ابراهيم		وهدى الخصيم المثال مع الجدول	جداجم
١ من عشرة الـ ١٠			
٩	١	جدول الترتيب التدرجية الـ ٩ من تسعه الـ ١٠	
٨	٢	جدول الترتيب التدرجية الـ ٨ من تسعه الـ ١٠	٦٣
٧	٣	جدول الترتيب التدرجية الـ ٧ من تسعه الـ ١٠	٤٨
٦	٤	جدول الترتيب التدرجية الـ ٦ من تسعه الـ ١٠	٣٦
٥	٥	جدول الترتيب التدرجية الـ ٥ من تسعه الـ ١٠	٢٥
٤	٦	جدول الترتيب التدرجية الـ ٤ من تسعه الـ ١٠	١٤
٣	٧	جدول الترتيب التدرجية الـ ٣ من تسعه الـ ١٠	١٣
٢	٨	جدول الترتيب التدرجية الـ ٢ من تسعه الـ ١٠	١٢
١	٩	جدول الترتيب التدرجية الـ ١ من تسعه الـ ١٠	١١
١٠ من خمسة الـ ٥			
٩	١	جدول الترتيب التدرجية الـ ٩ من خمسة الـ ٥	٤٥
٨	٢	جدول الترتيب التدرجية الـ ٨ من خمسة الـ ٥	٣٦
٧	٣	جدول الترتيب التدرجية الـ ٧ من خمسة الـ ٥	٢٥
٦	٤	جدول الترتيب التدرجية الـ ٦ من خمسة الـ ٥	١٤
٥	٥	جدول الترتيب التدرجية الـ ٥ من خمسة الـ ٥	٣٥
٥ من ثلاثة الـ ٣			
٤	١	جدول الترتيب التدرجية الـ ٤ من ثلاثة الـ ٣	١٣
٣	٢	جدول الترتيب التدرجية الـ ٣ من ثلاثة الـ ٣	٣٣
٢	٣	جدول الترتيب التدرجية الـ ٢ من ثلاثة الـ ٣	٢٣
١	٤	جدول الترتيب التدرجية الـ ١ من ثلاثة الـ ٣	١٣
٣ من ثلاثة الـ ٢			
٢	١	جدول الترتيب التدرجية الـ ٢ من ثلاثة الـ ٢	١٢
١	٢	جدول الترتيب التدرجية الـ ١ من ثلاثة الـ ٢	١١
٢ من ثلاثة الـ ١			
١	١	جدول الترتيب التدرجية الـ ١ من ثلاثة الـ ١	١٠

0 look at the primary source (handout)

0 what do you see? what stands out?

0 write down ≥5 things that come to mind

# What do we notice?

- 0 I can't read the words, but I can read the numerals!  
... but they look a bit different.



# What do we notice?

- 0 I can't read the words, but I can read the numerals!  
... but they look a bit different.



- 0 this raises the question: where do our numerals come from?

# What do we notice?

0 this is Pascal's triangle!

... but the last column doesn't match (or does it?)

# What do we notice?

0 this is Pascal's triangle!

... but the last column doesn't match (or does it?)

0 this raises the questions: how old is this source?

where does it come from?

# Ibn Mun'im ( $\pm 1200$ )

جدول المذاي مع الجدول		جدول من عشرة ألوان	
١	١	١	١
٩	١٥	١٥	١٥
٨	٣٦	٣٦	٣٦
٧	٢٨	٢٨	٢٨
٦	٢٠	٢٠	٢٠
٥	١٤	١٤	١٤
٤	٦	٦	٦
٣	٣	٣	٣
٢	٣	٣	٣
١	٣	٣	٣
٠	٣	٣	٣
٩	٣	٣	٣
٨	٣	٣	٣
٧	٣	٣	٣
٦	٣	٣	٣
٥	٣	٣	٣
٤	٣	٣	٣
٣	٣	٣	٣
٢	٣	٣	٣
١	٣	٣	٣
٠	٣	٣	٣

For a tassel of 10 colors									1	1	
For a tassel of 9 colors									1	9	10
For a tassel of 8 colors									1	8	45
For a tassel of 7 colors									1	7	28
For a tassel of 6 colors									1	6	21
For a tassel of 5 colors									1	5	35
For a tassel of 4 colors									1	4	10
For a tassel of 3 colors									1	3	6
For a tassel of 2 colors									1	2	3
For a tassel of 1 color	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	using color #1	using color #2 (& earlier)	using color #3 (& earlier)	using color #4 (& earlier)	using color #5 (& earlier)	using color #6 (& earlier)	using color #7 (& earlier)	using color #8 (& earlier)	using color #9 (& earlier)	using color #10 (& earlier)	Total no. of tassels

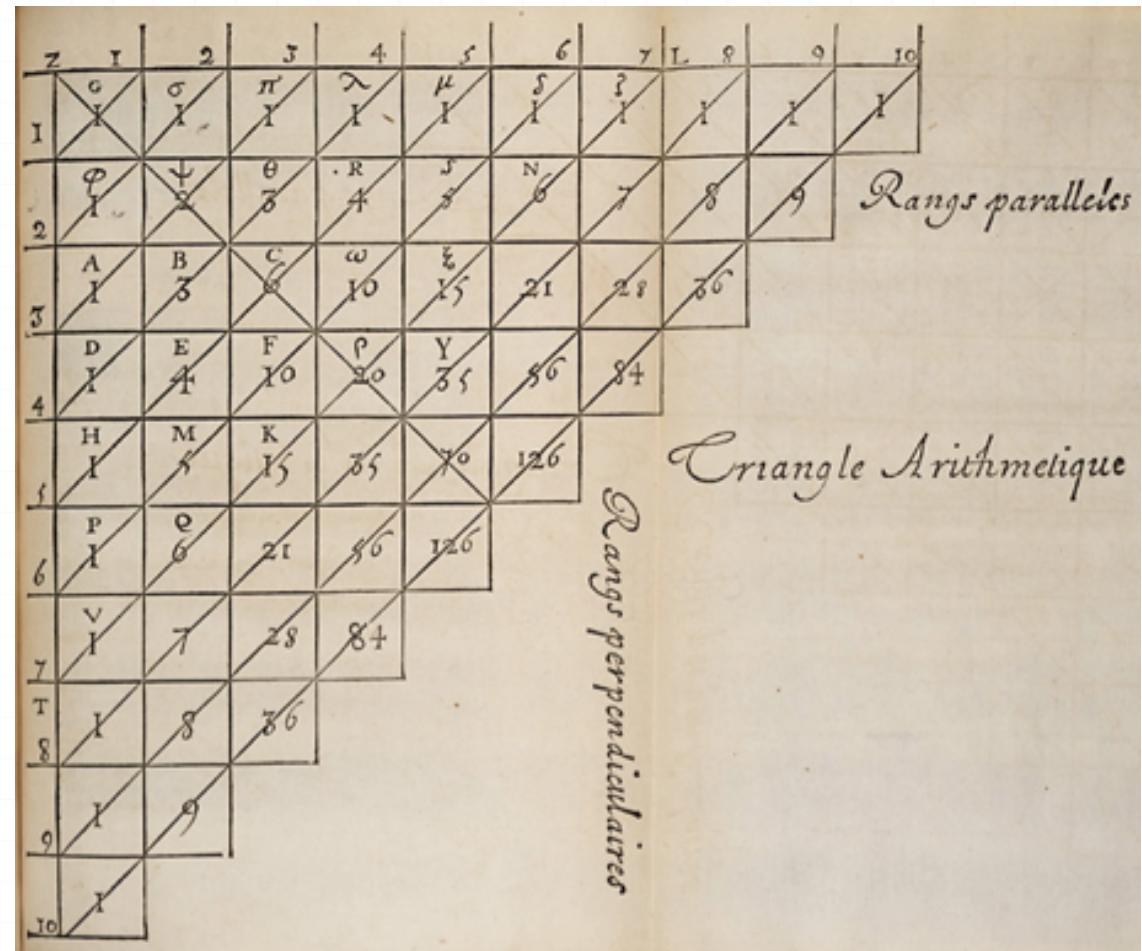
# Ibn Mun'im ( $\pm 1200$ )

Ahmad al-Ab'dari ibn Mun'im

- 0 came from Spain
- 0 probably lived at the Almohade court in Marrakech
- 0 specialist in geometry and number theory, also medical doctor
  
- 0 worked on old question (8<sup>th</sup> century): how many possible words can be formed out of the letters of the Arabic alphabet?
- 0 but this source, which he presented first: question about tassels (as we will see)

# Pascal's triangle

Pascal (1665)



# Pascal's triangle

0 not first one, but Pascal proved several identities and used induction-like principle

older Pascal's triangles:

- 0 algebraic in China,
- 0 combinatorial numbers in India,
- 0 Islamic sources,
- 0 and also in Western European sources.

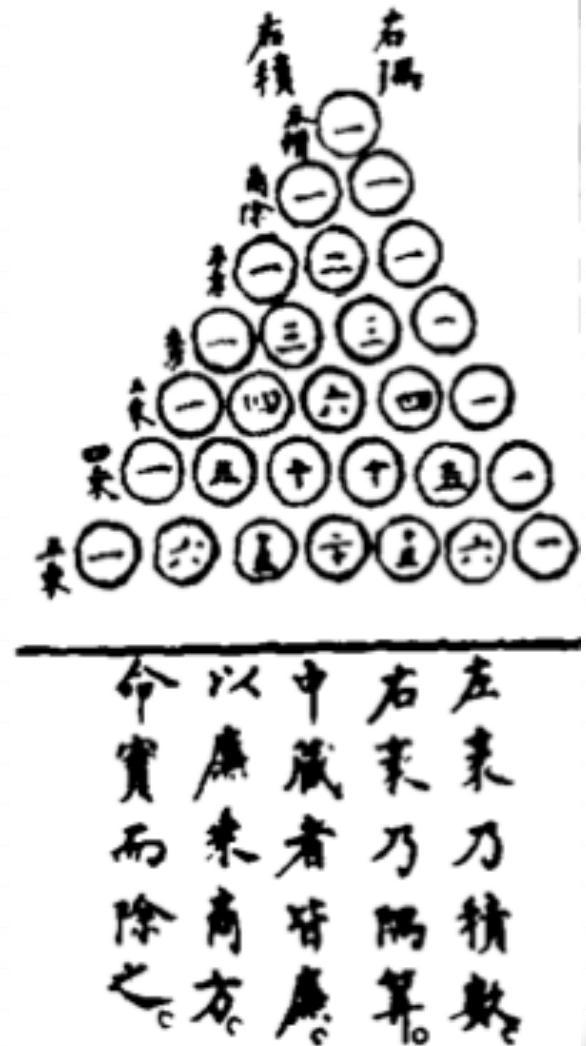
# Pascal's triangle in China

- 0 earliest representation:  
Yang Hui (1261)
- 0 around 1100 already known  
(Jia Xian)
- 0 extracting roots numerically using  
Pascal's triangle
- 0 based on identities like:

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

and

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + 1b^3$$



# Pascal's triangle in China

0 later: extended to solving equations numerically

0 equations like:

$$-x^4 + 763.200 x^2 - 40.642.560.000 = 0$$

0 method known around 13<sup>th</sup> century

0 method rediscovered: Horner-Ruffini method (1819)

0 more info: Joseph, *The crest of the peacock*

# Pascal's triangle in China

圖 方 索 七 法 古



Zhu Shijie  
*Precious mirror  
of the four  
elements* (1303)

also interesting  
sources to use in  
class!  
(Chinese number  
system)

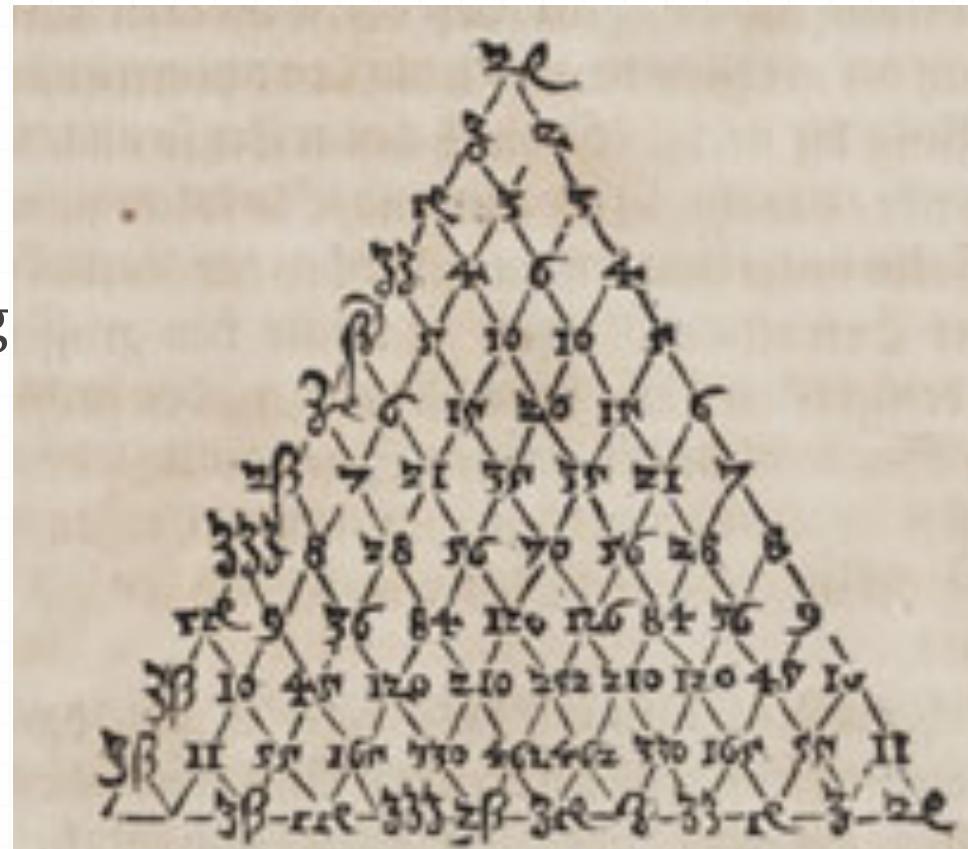
# Pascal's triangle in Islamic math

0 before Ibn Mun'im: already known at centre of Islamic Empire,  
... but only in algebraic setting

0 to 12<sup>th</sup> row: Nasir al-Din al-Tusi (1265)

# And Western Europe

- 0 example: Simon Jacob's *Rechenbuch* (1565)
- 0 also used for calculating roots
- 0 others: Stifel (1545), Tartaglia (1556)



# Intermezzo: notation

Stampioen (1639), but notation is older (and *not* Arabic...)

Arab:	Griec:	Latin:	d'Onse.
— ፩	'αειδησ	N---	1 2
□ ፪	-- δ̄	Q---	2 4
፫ ፬	-- χ̄	C---	3 8
፭ ፮	-- δδ̄	QQ--	4 16
፯ ፱	-- δχ̄	QC--	5 32
፰ ፲	-- ፳	QQQ--	6 64
B/፳	-- --	QQC--	7 128

Ende soo voort oneyndigh.

# Intermezzo: notation

0 Chuquet (1484)     $1^3 \cdot \bar{m} \cdot 5^2 \cdot \bar{p} \cdot 7^1 \cdot \text{montent } \mathcal{R}^2 \cdot \underline{1^1} \cdot \bar{p} \cdot 6^0.$

0 Pacioli (1494):     $cu \cdot \tilde{m} \cdot 5 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 7 \cdot co. — \mathcal{R} v \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 6.$

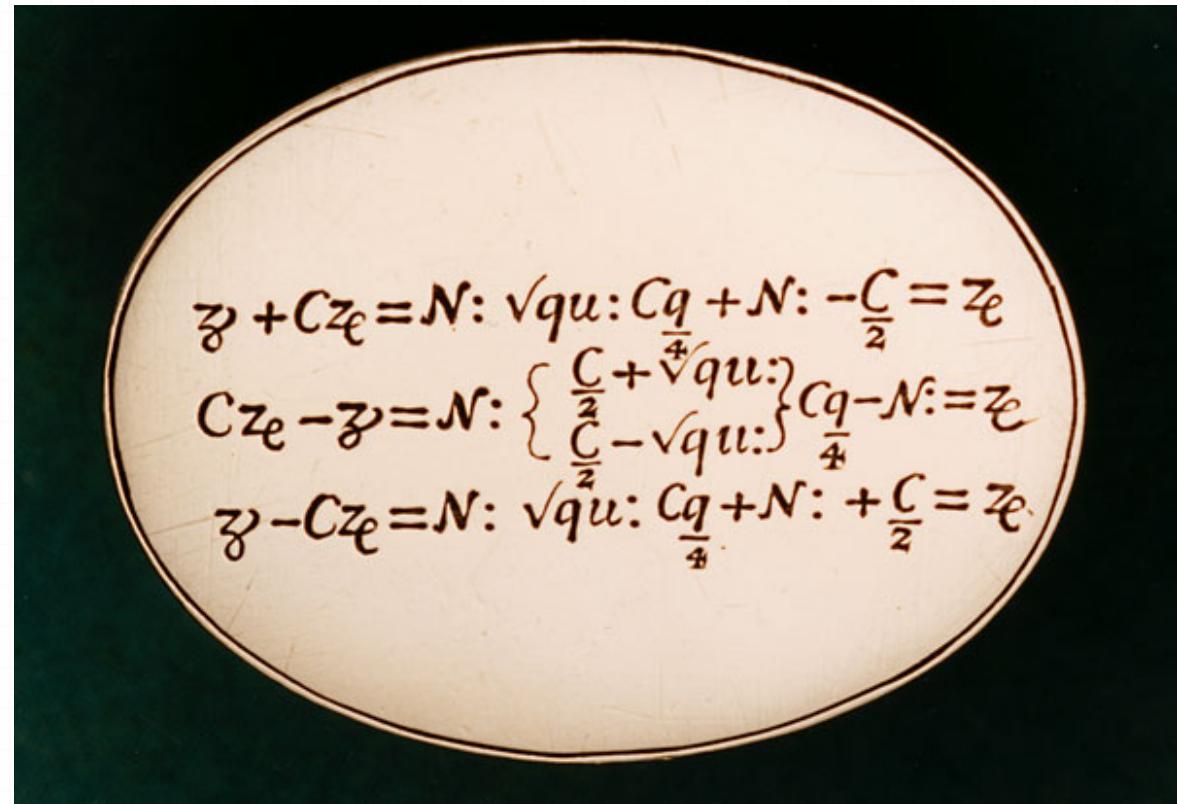
0 Stifel (1544):     $c^e - 5\gamma + 7\vartheta \text{ aequ.} \sqrt{\vartheta} + 6.$

0 Descartes (1637):     $x^3 - 5xx + 7x \propto \sqrt{x + 6}.$

$$x^3 - 5x^2 + 7x = \sqrt{x + 6}.$$

# Intermezzo: notation

English, 17<sup>th</sup> century



# Take another look

0 can you make  
sense of this  
last column?

0 context: 10  
colours of silk

For a tassel of 10 colors									1	1
For a tassel of 9 colors									1	9
For a tassel of 8 colors									1	8
For a tassel of 7 colors									1	7
For a tassel of 6 colors									1	6
For a tassel of 5 colors									1	5
For a tassel of 4 colors									1	4
For a tassel of 3 colors									1	3
For a tassel of 2 colors									1	2
For a tassel of 1 color									1	1
	using color #1	using color #2 (& earlier)	using color #3 (& earlier)	using color #4 (& earlier)	using color #5 (& earlier)	using color #6 (& earlier)	using color #7 (& earlier)	using color #8 (& earlier)	using color #9 (& earlier)	using color #10 (& earlier)
										Total no. of tassels

# The last column

0 on the one hand:

it seems like the numbers should be moved up one position...

0 ... but on the other hand:

the numbers in the last column are the sums of the numbers in each row!

For a tassel of 4 colors	1	4	10	20	35	56	84	210
	$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 = 210$							

# Explaining the pattern

how many different tassels can be made consisting of 4 colours of silk, when we have 10 colours to choose from?





# Explaining the pattern

how many different tassels can be made consisting of 4 colours of silk, when we have 10 colours to choose from?

For a tassel of 4 colors	1	4	10	20	35	56	84	210
--------------------------	---	---	----	----	----	----	----	-----

apparently: add the numbers of different tassels consisting of 3 colours that can be made choosing from 3, 4, 5, 6, 7, 8 or 9 colours:

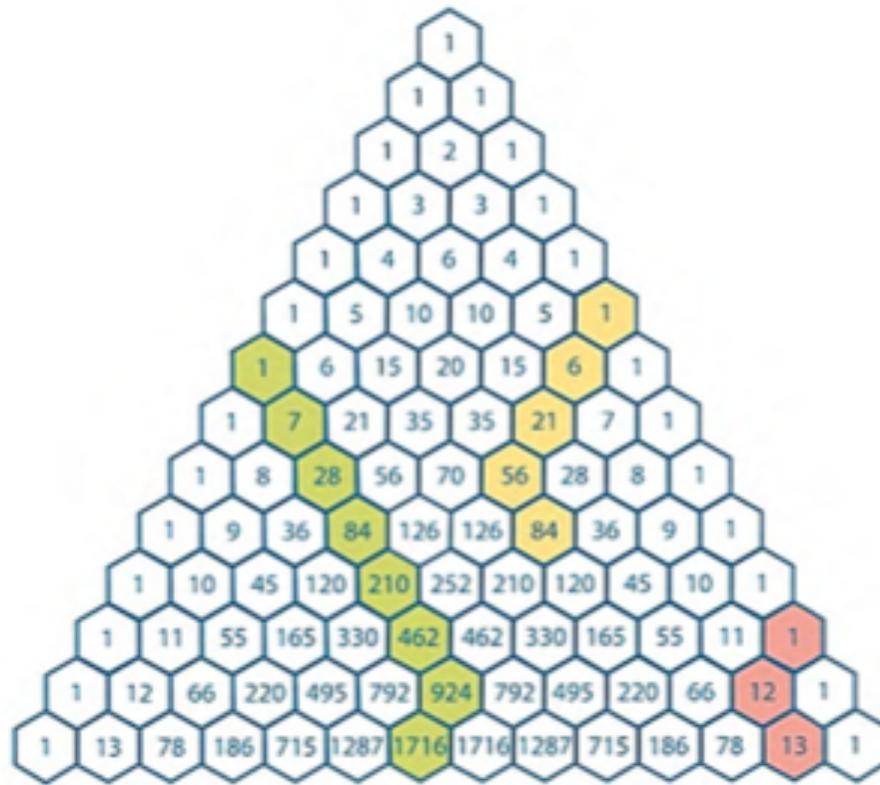
$$\binom{10}{4} = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \binom{8}{3} + \binom{9}{3}$$

but why?

# Explaining the pattern

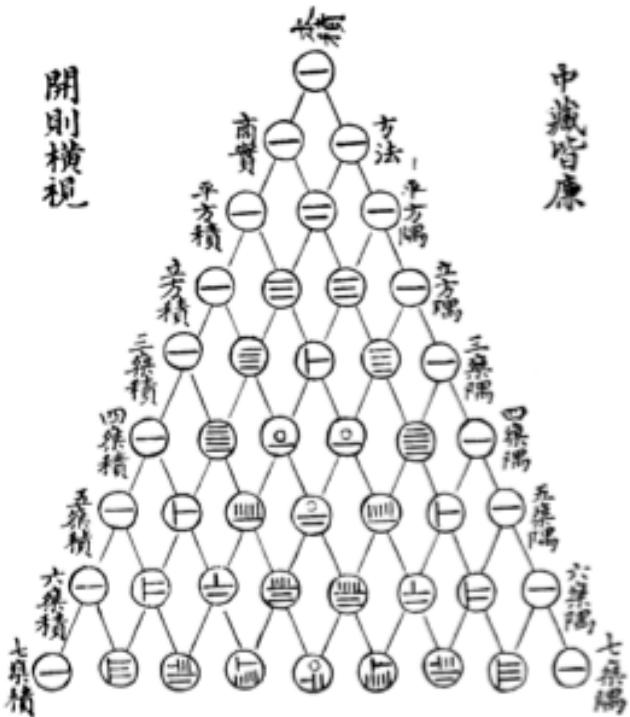


# The hockey stick lemma, or: Christmas stocking theorem



# Asking questions

圖 方 索 七 法 古



Zhu Shijie

*Precious mirror of the four elements* (1303)

think of as many  
questions/assignments  
using this source as  
possible!

write them down and  
compare/discuss with  
neighbours

# Asking questions

Examples:

- 0 what do you see?
- 0 which country do you think this source is from?
- 0 do you see a pattern? (or maybe several?)
- 0 (or: have you seen this triangle before? what can you use it for?)
- 0 how does the number system that is used here work?
- 0 it is a positional number system? how do you know? what is its base?
- 0 what would the number ... look like in this number system?
- 0 in what ways is it similar to/different from our number system?
- 0 etc etc.

# How to use primary sources as a didactical tool

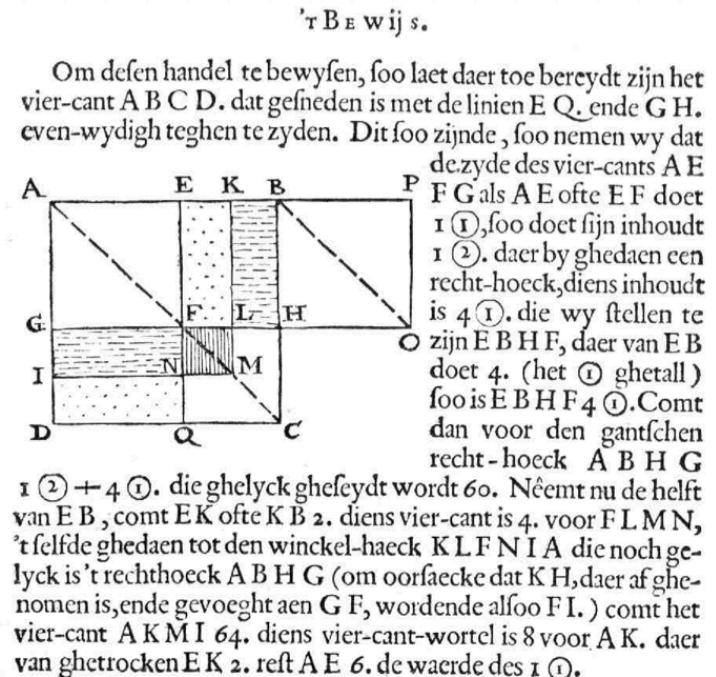
- 0 important: you don't necessarily have to use *all* the things you *could* get out of a source
- 0 questions can be asked on many different levels!
- 0 looking at notations / words / pictures alone can be interesting already
- 0 you can focus on mathematical content, or on cultural / historical questions, or both
- 0 *do* ask the “easy” questions!
- 0 let students ask questions themselves

# Why use primary sources as a didactical tool

my experience: enriches cognitive “schemata” (Skemp)

example:

- 0 solving quadratic equations in “Babylonian” way links algebra with geometry (“completing the square” becomes meaningful)
- 0 discussion on negative numbers: why so many cases?



# Why use primary sources as a didactical tool

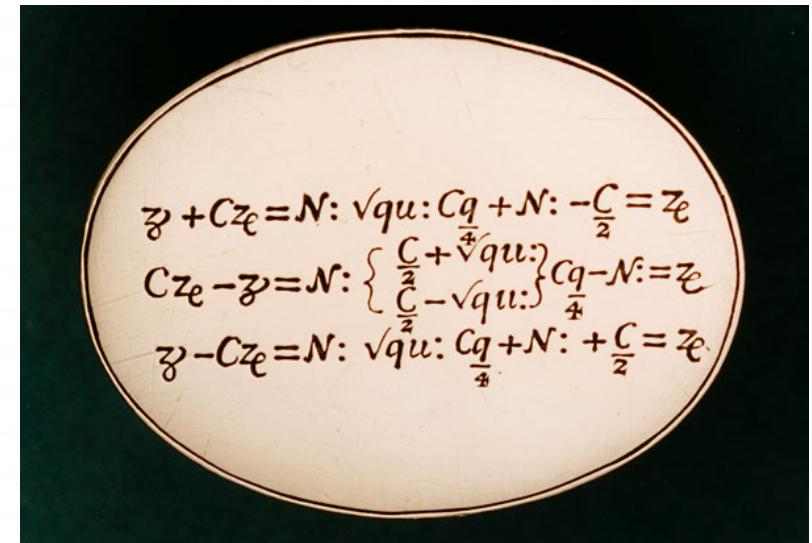
my experience: enriches cognitive “schemata” (Skemp)

Laet zijn i ② + 4 ① ghelyck 60.

example:

0 notations for equations show development of concept of variable

0 and distinction between the unknown/parameter, etc.



# Why use primary sources as a didactical tool

may give different view on the topic,  
can be starting point for learning by “guided  
reinvention”

- 0 content of the source can be part of the “guidance”
- 0 example: we discovered mathematical theorem by looking at Ibn Mu’nim’s triangle

# Why use primary sources as a didactical tool

- 0 smaller in scope than project on history of math,
- 0 but can be deep in content
  
- 0 if well-chosen suitable for (small) part of lesson with specific mathematical learning goal
- 0 feasible to use worksheet on source alongside textbook

# Why use primary sources as a didactical tool

using history in math class shows that mathematics is invented by humans,

0 who asked practical questions,

0 who struggled with new concepts,

0 who made mistakes.

Mistakes are  
**PROOF**  
that you are  
**TRYING**

# Questions, ideas, contact

Jeanine Daems

[jeanine.daems@hu.nl](mailto:jeanine.daems@hu.nl)

twitter:

@jeanine\_d

@dvandenbogaart

الجداول	البرامج
١ من عشرين إلى سبعين	وهي تراجمة المثال مع الجدول
١٠	١ جدول التدرج بالتقى من سبعة ألوان تسعه ألوان
٣٦	١ جدول التدرج الذي من شأنه أن يزيد الألوان بـ ٦ ألوان
١٢٠	١ جدول التدرج الذي يزيد الألوان بـ ٨ ألوان
٤٢٠	١ جدول التدرج الذي يزيد الألوان بـ ٩ ألوان
٥٦٢	١ من خمسة ألوان تسعه ألوان
٦١٦	١ جدول يزيد الألوان بـ ٧ ألوان
٦٣٦	١ من أربعة ألوان لـ ٥ ألوان
٨٤٢٠	١ من أربعة ألوان لـ ٦ ألوان
١٢٥	١ من ثلاثة ألوان لـ ٤ ألوان
١٣٢	١ من ثلاثة ألوان لـ ٥ ألوان
١٤٢	١ متلوين بـ ٣ ألوان
١٥٣	١ متلوين بـ ٤ ألوان
١٦٤	١ متلوين بـ ٥ ألوان
١٧٥	١ متلوين بـ ٦ ألوان
١٨٦	١ متلوين بـ ٧ ألوان
١٩٧	١ متلوين بـ ٨ ألوان
٢٠٨	١ متلوين بـ ٩ ألوان
٢١٩	١ متلوين بـ ١٠ ألوان
٢٢١	١ متلوين بـ ١١ ألوان
٢٣٢	١ متلوين بـ ١٢ ألوان
٢٤٣	١ متلوين بـ ١٣ ألوان
٢٥٤	١ متلوين بـ ١٤ ألوان
٢٦٥	١ متلوين بـ ١٥ ألوان
٢٧٦	١ متلوين بـ ١٦ ألوان
٢٨٧	١ متلوين بـ ١٧ ألوان
٢٩٨	١ متلوين بـ ١٨ ألوان
٣٠٩	١ متلوين بـ ١٩ ألوان
٣١١٠	١ متلوين بـ ٢٠ ألوان
٣٢١١	١ متلوين بـ ٢١ ألوان
٣٣١٢	١ متلوين بـ ٢٢ ألوان
٣٤١٣	١ متلوين بـ ٢٣ ألوان
٣٥١٤	١ متلوين بـ ٢٤ ألوان
٣٦١٥	١ متلوين بـ ٢٥ ألوان
٣٧١٦	١ متلوين بـ ٢٦ ألوان
٣٨١٧	١ متلوين بـ ٢٧ ألوان
٣٩١٨	١ متلوين بـ ٢٨ ألوان
٤٠١٩	١ متلوين بـ ٢٩ ألوان
٤١٢٠	١ متلوين بـ ٣٠ ألوان
٤٢٣٠	١ متلوين بـ ٣١ ألوان
٤٣٤٠	١ متلوين بـ ٣٢ ألوان
٤٤٤١	١ متلوين بـ ٣٣ ألوان
٤٥٤٢	١ متلوين بـ ٣٤ ألوان
٤٦٤٣	١ متلوين بـ ٣٥ ألوان
٤٧٤٤	١ متلوين بـ ٣٦ ألوان
٤٨٤٥	١ متلوين بـ ٣٧ ألوان
٤٩٤٦	١ متلوين بـ ٣٨ ألوان
٥٠٤٧	١ متلوين بـ ٣٩ ألوان
٥١٤٨	١ متلوين بـ ٤٠ ألوان
٥٢٤٩	١ متلوين بـ ٤١ ألوان
٥٣٥٠	١ متلوين بـ ٤٢ ألوان
٥٤٥١	١ متلوين بـ ٤٣ ألوان
٥٥٥٢	١ متلوين بـ ٤٤ ألوان
٥٦٥٣	١ متلوين بـ ٤٥ ألوان
٥٧٥٤	١ متلوين بـ ٤٦ ألوان
٥٨٥٥	١ متلوين بـ ٤٧ ألوان
٥٩٥٦	١ متلوين بـ ٤٨ ألوان
٦٠٥٧	١ متلوين بـ ٤٩ ألوان
٦١٥٨	١ متلوين بـ ٥٠ ألوان
٦٢٥٩	١ متلوين بـ ٥١ ألوان
٦٣٥١٠	١ متلوين بـ ٥٢ ألوان